Пермский государственный технический университет
Пермский государственный педагогический университет

Гладкий Сергей Леонидович

РАЗВИТИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Специальность 05.13.18
Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Научный руководитель:
профессор, д.т.н. Ясницкий Л.Н.

Пермь 2007

Содержание

Введение

Одним из наиболее важных направлений развития математической физики является разработка методов решения краевых задач. С решением краевых задач связано большинство проблем прочности, надежности и долговечности объектов ответственного назначения (военных и гражданских сооружений, транспортных средств, объектов энергетики и т.д.), поэтому, особую актуальность это направление приобрело в XXI веке.

В истории развития методов решения краевых задач математической физики можно проследить два периода. Первый исторический период, продлившийся примерно до середины XX в., начался с основополагающих работ Ж.Л. Д'Аламбера и Ж.Б.Ж. Фурье, выполненных в XVIII – начале XIX вв. С помощью метода разделения переменных им удалось получить ряд решений дифференциальных уравнений в частных производных для простейших областей, называемых каноническими – круга, квадрата, цилиндра, шара и пр. Дальнейшие усилия математиков в этой области на протяжении последующих полутора веков в основном сводились к развитию метода разделения переменных и изобретению других приемов, позволяющих получить решение той или иной краевой задачи для других дифференциальных уравнений, для других областей с другими краевыми условиями. Каждое такое решение было своего рода событием в математическом мире, и методы математического моделирования были доступны узкому кругу математиков-профессионалов, деятельность которых по существу представляла собой творческий процесс.

Согласно методу разделения переменных Фурье, искомая функция нескольких переменных и граничные условия раскладывается в бесконечные ряды на поверхности области краевой задачи. Коэффициенты ряда Фурье для искомой функции находятся из условия равенства соответствующих слагаемых двух рядов. Таким образом, решение краевой задачи получается в виде бесконечного ряда. Данное решение является точным аналитическим решением краевой задачи. Однако, метод Фурье (в своей оригинальной формулировке) применим лишь для линейных краевых задач (поскольку решение ищется в виде суммы) и для областей канонической формы.

Дальнейшее развитие метода Фурье связано с его применением к телам более сложных конфигураций за счет введения криволинейных систем координат. Здесь следует упомянуть основополагающие работы П.А.Шифа [165], П.Ф.Папковича [98, 99], А.И.Лурье [82, 83], В.К.Прокопова [103, 104], В.Т.Гринченко [45], Ю.Н.Подильчука [105] и др.

Другое развитие метода Фурье – применение его к более сложным дифференциальным уравнениям за счет представления их общих решений через гармонические и бигармонические функции. Такие представления были предложены В.Кельвином и П.Г.Тайтом [164], М.Дж.Буссинеском [162], Б.Г.Галеркиным [22], П.Ф.Папковичем [98, 99], Г.Нейбером [94], В.И.Блохом [10, 11], Ю.А.Крутковым [73], К.В.Соляник-Красса [121, 122], М.Г.Слободянским [118, 119], В.М.Деевым [49, 50] и др.

Следующая идея – это идея использования известных решений в простых областях для получения решений в областях более сложных конфигураций. Реализация этой идеи происходила в двух направлениях. Первое – это преобразование координат, не нарушающее форму дифференциального уравнения краевой задачи. Такое ненарушение обеспечивается выполнением условий Коши-Римана, что реализуется, например, конформными отображениями, развитыми и примененными в работах Г.В.Колосова [65], Н.И.Мусхелишвили [91, 92], М.А.Лаврентьева и Б.В.Шабата [77], Г.Н.Савина [115], Д.И.Шермана [139], С.Г.Михлина [88, 90], А.В.Угодчикова, Л.И.Волковыского [19, 130], Е.А.Колчановой [66, 67] и др. Второе направление связано с расширением заданной расчетной области, аналитическим продолжением решения за границу, возмущением формы границы, погружением заданной области в область более простой геометрической формы. Подобные идеи прослеживаются в работах Н.И.Безухова и О.В.Лужина [7], Б.Г.Коренева [68], А.Н.Гузя и Ю.Н.Немиша [46], И.Н.Шардакова, И.Н.Трояновского, И.Н.Труфанова, В.П.Матвеенко [137, 138], Л.Н.Ясницкого [147] и др.

По своей физической сути к этим методам близок метод источников, встречающийся в работах С.П.Тимошенко [127], Р.Миндлина и Д.Чена [87], примененный Х.А.Рахматулиным [106], Х.Валиджановым [17], и всесторонне исследованный А.А.Роговым [108-110]. Согласно этому методу заданное тело рассматривается как часть бесконечного пространства, в точках которого за пределами заданного тела помещаются точечные источники (сосредоточенные силы), интенсивность которых подбирается из условия выполнения граничных условий задачи. Следует заметить, что идея применения фундаментальных решений (описывающих воздействия источников) для нахождения решения краевых задач встречается в классических работах по теории потенциала Ф.Фредгольма, Д.Гильберта, Ж.Пуанкаре, Н.И.Мусхелишвили, Ф.Трикоми и др. С этой точки зрения метод источников можно считать одним из методов теории потенциала. Приближение источников к границам заданного тела приводит к сингулярности разрешающих интегральных уравнений. Методы решения краевых задач, основанные на решении сингулярных интегральных уравнений, развиваются в работах Н.Д. Купрадзе [76], М.А. Алексидзе [1, 2], П.И. Перлина, В.З.Партона [100, 101] и др. Впоследствии за этой группой методов закрепился термин – методы граничных элементов, которые в настоящее время интенсивно развиваются и применяются саутгемптонской школой механиков, возглавляемой К.Бреббия [16, 161, 164].

Приближенные аналитические методы решения краевых можно разделить на три группы: методы типа Треффца, Ритца и Рейснера [24, 52, 129]. Данные методы имеют много общего. Согласно этим методам искомое решение представляется в виде суперпозиции набора базисных функций, коэффициенты при которых ищутся из некоторого условия. В методах типа Треффца каждая из базисных функций удовлетворяет дифференциальному уравнению краевой задачи, а коэффициенты ищутся из условия приближенного удовлетворения граничным условиям. Для методов типа Ритца, наоборот, базисные функции должны тождественно удовлетворять краевым условиям, а не дифференциальному уравнению. В методе Рейснера на базисные функции не накладывается никаких ограничений и для отыскания коэффициентов формируется функционал Рейснера..

Все эти методы в общем случае являются приближенными, и точность решения зависит от выбора базисных функций (то есть от таланта и опыта исследователя, применяющего данный метод). В некоторых случаях удается подобрать такие базисные функции, что дифференциальное уравнение и граничные условия будут удовлетворены тождественно, тогда данные методы приводят к точному решению краевой задачи. При дальнейшем анализе этих методов решения краевых задач, исследователи пришли к выводу, что все они являются частными случаями метода взвешенных невязок (МВН) [9, 16] и отличаются лишь выбором системы базисных функций. Сложность выбора таких функций для решения конкретной задачи с приемлемой точностью является основным недостатком этих аналитических методов. Правила выбора не являются формализуемыми, что не дает возможности применять методы широкому кругу исследователей.

С точки зрения оценки точности полученных результатов метод Треффца имеет преимущество, поскольку приводит к аналитическому решению, которое тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению краевой задачи. Поэтому он допускает простую и надежную оценку точности решения краевой задачи по невязкам удовлетворения граничным условиям [36, 147].

Второй этап развития методов решения краевых задач связан с появлением в начале 1950-х гг. XX века электронно-вычислительных машин. На свет появилась новая область математики, называемая дискретной. Оказалось, что процесс интегрирования дифференциальных уравнений можно свести к множеству элементарных арифметических операций и выполнение этих операций поручить компьютеру. На смену классическим аналитическим методам пришли численные алгоритмы. Появление персональных компьютеров (ПК) обусловило широкое распространение универсальных пакетов прикладных программ, оснащенных удобными сервисными средствами. Таким образом, математическое компьютерное моделирование стало общедоступным.

Наибольшее распространение в области решения краевых задач получили так называемые сеточные численные методы. Их общей чертой является то, что задача нахождения искомой функции из некоторого функционального пространства, определенной в непрерывной области изменения аргумента, заменяется задачей отыскания сеточной функции из другого пространства, определенной на дискретном множестве значений аргумента. Уравнения краевой задачи также заменяются их дискретными аналогами в функциональном пространстве сеточной функции. Такая замена позволяет свести исходную задачу с бесконечным числом степеней свободы к задаче с конечным числом неизвестных. Последняя, обычно, дает систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), относительно неизвестных значений сеточной функции. Отличаются сеточные методы выбором вида сеточных функций и способами построения разрешающих сеточных уравнений. Данные различия обуславливают область применения, преимущества и недостатки соответствующего метода.

Первым сеточным методом решения краевых задач, получившим широкое распространение, является метод конечных разностей (МКР) [114, 116, 126, 128]. В данном методе область непрерывного изменения аргумента заменяется конечным множеством узлов, а искомая функция – сеточной функцией. Краевая задача обычно рассматривается в дифференциальной постановке. Дифференциальный оператор заменяется конечно-разностным аналогом. Вид конечно-разностного оператора зависит от выбора аппроксимации производных их разностными аналогами. Краевые условия также заменяются их разностными аналогами, в итоге имеем систему алгебраических уравнений относительно значений сеточной функции в узлах. МКР получил широкое распространение в решении краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов (стационарных и нестационарных задач теплопроводности, задач о колебаниях и т.д.). Для различных задач разработаны разные схемы, обладающие своими преимуществами. В общем случае их можно разделить на явные и неявные. Неявные схемы почти всегда являются безусловно устойчивыми, но приводят к алгебраическим системам высоких порядков. Явные схемы, обычно, условно устойчивы, что требует решения нестационарной задачи с малым шагом по времени. Несмотря на достаточную универсальность, МКР имеет ряд недостатков [116, 128]. Например, схемы МКР достаточно сложно реализуемы для трехмерных задач. Для областей сложной конфигурации обычно требуется неравномерная сетка со сгущениями, которая также усложняет реализацию разностной схемы. Для задач с неоднородными свойствами для обеспечения устойчивости необходимо применять специальные разностные схемы.

Еще одним численным методом является метод граничных элементов (МГЭ) [9, 16, 161, 163]. Он основывается на использовании фундаментальных решений, то есть решений дифференциальных уравнений задачи для единичного точечного источника в бесконечном (или полубесконечном) пространстве. Для краевой задачи выводятся граничные интегральные уравнения (ГИУ), связывающие значения искомой функции внутри области с заданными значениями функции и/или ее производных на границе.

Существуют различные способы получения ГИУ. Обычно прибегают к использованию какого-либо вариационного принципа. Идея использования интегральных уравнений в аналитической форме была предложена еще до появления МГЭ Фредгольмом и развита Купрадзе [1, 2, 76, 100, 101]. Однако получаемые ГИУ могут быть решены в аналитической форме только в редких случаях, для областей простой формы. Идея МГЭ, как численного метода, заключается в дискретном представлении ГИУ, что приводит в итоге к системе линейных уравнений относительно неизвестных значений в конечном множестве узлов границы. С этой точки зрения МГЭ тоже является сеточным методом. МГЭ (как и все сеточные методы) может рассматриваться как частный случай МВН [9, 16], когда в качестве аппроксимирующих функций используются фундаментальные решения. Это дает следующее преимущество: полученное решение удовлетворяет дифференциальному уравнению внутри области (хотя и не удовлетворяет на границе). Характерным для МГЭ является уменьшение размерности задачи на единицу т.к. в процессе формирования разрешающей системы линейных алгебраических уравнений рассматривается только граница. Также МГЭ эффективен для задач с бесконечными областями, т.к. условия на бесконечности могут быть удовлетворены “естественным образом”. Здесь следует отметить ограничение на класс задач, где эти преимущества сохраняются. Это линейные задачи с однородными по области свойствами материала. Для областей с неоднородными свойствами и нелинейных задач получить фундаментальное решение не удается, в этом случае используют решение соответствующее однородным свойствам и линейной задаче соответственно. Однако, дифференциальное уравнение уже не удовлетворяется тождественно. К тому же требуется дискретизация не только границы, но и самой области. При наличии высоких нелинейностей применение метода теряет свои преимущества.

Пожалуй, самым широко используемым сеточным методом является метод конечных элементов (МКЭ) [23, 58, 97, 113, 136]. Метод основан на разбиении исходной области на множество ячеек (конечных элементов). В каждом элементе вводится аппроксимирующая функция, выраженная через значения искомой функции в узлах элемента с помощью функций формы. Обычно в качестве последних выступают полиномы. На основе какого-либо общего закона (обычно в виде вариационного принципа) формируется разрешающая СЛАУ относительно значений функции в узлах конечноэлементной сетки. Разбиение области на конечные элементы позволяет эффективно применять метод для задач с высокой нелинейностью и неоднородностью свойств, поскольку можно рассматривать материал однородным в пределах каждого элемента. К недостаткам метода можно отнести высокую размерность разрешающих СЛАУ (по сравнению, например, с МГЭ). Обусловленность разрешающих систем для МКЭ ухудшается с увеличением числа конечных элементов (уменьшением размера элемента), что может привести к большой погрешности в решении при малых погрешностях исходных данных.

Некоторые исследователи в настоящее время говорят о наступлении нового периода в развитии методов решения краевых задач. Третий период связывают с очередной компьютерной революцией, обусловленной успехами в сфере искусственного интеллекта. Интеллектуализация компьютеров позволяет надеяться, что аналитические методы решения краевых задач вновь займут достойную позицию в данной области математического компьютерного моделирования.

Как видно из приведенного краткого обзора методов решения краевых задач, к настоящему времени разработан значительный математический аппарат, позволяющий в настоящее время решать широкий круг проблем. Однако, не существует одного универсального метода, который обладал бы преимуществами во всех ситуациях. Каждый метод имеет свою область применения, в которой он является более эффективным. Поэтому разработка новых методов и усовершенствование существующих остается актуальной задачей.

В настоящее время одним из наиболее важных критериев эффективности методов решения краевых задач, определяющих их практическую ценность, является возможность точной оценки погрешности получаемых решений. В работе рассматривается один из аналитических методов решения краевых задач – метод фиктивных канонических областей (ФКО). Метод ФКО является, по сути, развитием метода Треффца. Он позволяет надежно оценивать точность полученных решений, и в то же время решать краевые задачи для областей сложной формы.

Метод ФКО был предложен в 1973 году Л. Н. Ясницким [147] как геометрическая интерпретация решения задач методом Треффца. Дело в том, что метод Треффца (предложенный в 1926 г. [129]), несмотря на отмеченное уникальное свойство, долгое время оставался не пригодным для широкого практического применения. Нерешенной была проблема подбора базисных функций, удовлетворяющих решаемым дифференциальным уравнениям и обеспечивающих сходимость метода. Только в редких случаях путем увеличения числа функций удавалось уменьшить до приемлемых значений погрешность удовлетворения краевым условиям и получить более-менее приемлемые решения краевых задач. Успех применения метода Треффца зависел от опыта и интуиции математика, а порой и просто от везения. Геометрическая интерпретация Л.Н.Ясницкого [147] позволила разобраться в проблемах сходимости и корректности, построить методику выбора базисных функций, впоследствии названную методом ФКО. В работе [147] помимо геометрической интерпретации была дана первая формулировка теоремы сходимости (продолжимости) и ее первое доказательство в случае плоских краевых задач для уравнений Лапласа и Ламе. Здесь же предложен способ оценки погрешности на основе принципа максимума.

В 1973 г. методика выбора базисных функций к методу Треффца вместе с компьютерными программами были переданы сотруднику Института механики сплошных сред УрО РАН В.А.Елтышеву. В его руках метод ФКО получил дальнейшее развитие и эффективное применение для расчета напряженно-деформированного состояния круговых цилиндров, скрепленных с оболочками [13-15]. В 1985 г. А.Ю.Большаковым и В.А.Елтышевым [14] была сформулирована и доказана теорема о сходимости метода ФКО в случае, если фиктивная и заданная области топологически эквивалентны. Однако основным критерием выбора фиктивных канонических областей оставалась теорема продолжимости [147], исчерпывающее доказательство которой для общего объемного случая было выполнено в 1988 г. С.Я.Гусманом [47].

Однако, не смотря на имеющиеся теоретические и практические результаты и преимущества, метод ФКО не является широко распространенным. Причиной этого, по мнению автора диссертации, является недостаточная теоретическая развитость метода ФКО и отсутствие его хорошей программной реализации. Целью настоящей работы является развитие метода ФКО, создание реализующей его компьютерной программы и ее применение для решения практических задач, а именно:

- разработка новых алгоритмов, позволяющих повысить точность решений, получаемых методом ФКО;
- расширение возможностей и применение метода ФКО для решения новых классов краевых задач – задач термоупругости и нестационарных задач теплопроводности;
- создание библиотеки ФКО для плоских и осесимметричных задач теплопроводности, теории упругости и термоупругости;
- разработка программы, реализующей метод ФКО, с использованием современных технологий в области программирования, в том числе, элементов искусственного интеллекта;
- решение практических задач методом ФКО.

1 Метод фиктивных канонических областей

1.1 Теоретические основы метода фиктивных канонических областей

Пусть требуется решить линейную краевую задачу [63]: найти функцию $U(\bar{x})$, удовлетворяющую в пределах некоторого тела $D \subset R^3$ дифференциальному уравнению в частных производных

$$L\,U(\bar{x}) = R(\bar{x}), \quad \bar{x} \in D, \tag{1.1}$$

и на поверхности S тела D граничным условиям

$$B\,U(\bar{x})\,\big|_S = B^*(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S, \tag{1.2}$$

где L и B – заданные линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами; $R(\bar{x})$ и $B^*(\bar{x})$ – заданные функции координат $\bar{x}$. В работе рассматриваются только корректные по Адамару задачи [89, 128]: решение задачи (1.1)-(1.2) существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных (устойчиво по исходным данным) [21, 51, 52, 60, 61, 84, 88, 89, 93].

Согласно методу ФКО, решение краевой задачи ищется в виде конечной суммы

$$U(\bar{x}) = U^R(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{N} c_n\,u_n(\bar{x}), \tag{1.3}$$

где $U^R(\bar{x})$ – любое частное решение уравнения (1.1), c_n – постоянные коэффициенты, $u_n(\bar{x})$ – базисные функции, каждая из которых тождественно удовлетворяет однородному уравнению

$$L\,U(\bar{x}) = 0\,. \tag{1.4}$$

Базисные функции выбираются следующим образом [146-157]: существуют такие области, называемые каноническими, для которых известны решения (например, полученные на первом этапе применения метода разделения переменных Фурье) в виде бесконечного ряда

$$U^V\left(\bar{\varsigma}^V\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^V\,u_n^V\left(\bar{\varsigma}^V\right), \quad \bar{\varsigma}^V \in V\,. \tag{1.5}$$

Такие решения часто называют общими, в том смысле, что подбором коэффициентов c_n^V из них можно выделить частные решения, удовлетворяющие достаточно произвольным краевым условиям на границе канонической области $V \subset R^3$ с любой точностью. Под достаточно произвольными понимаются граничные условия, не имеющие разрывов, изломов и т.д. Согласно методу ФКО исходное тело D погружается в пересечение нескольких канонических областей $V_1 \cap V_2 \cap \ldots$. На рисунках 1.1 и 1.2 приведены примеры погружения исходного тела в одну каноническую область и пересечение трех областей. Решение краевой задачи для исходного тела D ищется в виде суммы решений относящихся к каноническим областям. В каждом таком решении ограничивают число слагаемых. Неизвестные коэффициенты c_n находятся из условия приближенного удовлетворения краевым условиям.

Таким образом, метод ФКО является приближенным аналитическим методом. Решение краевой задачи, полученное методом ФКО, тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению, и приближенно краевым условиям.

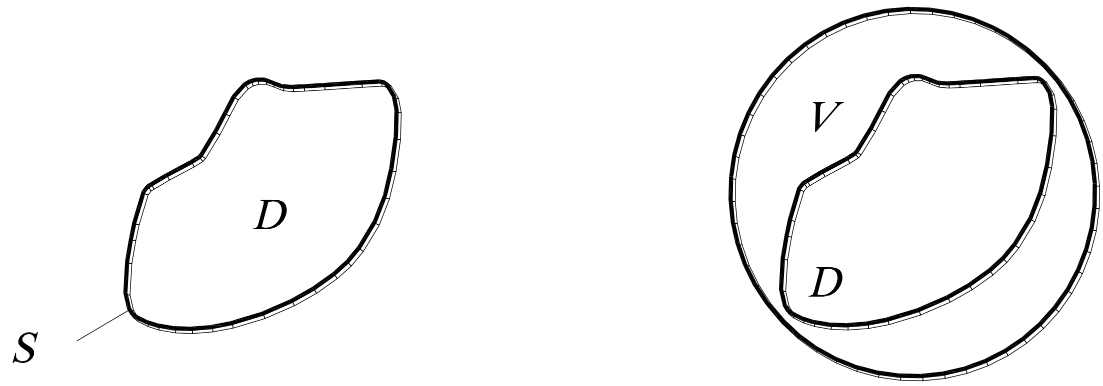


Рис. 1.1 Исходное тело D с границей S вписано в каноническую область V .

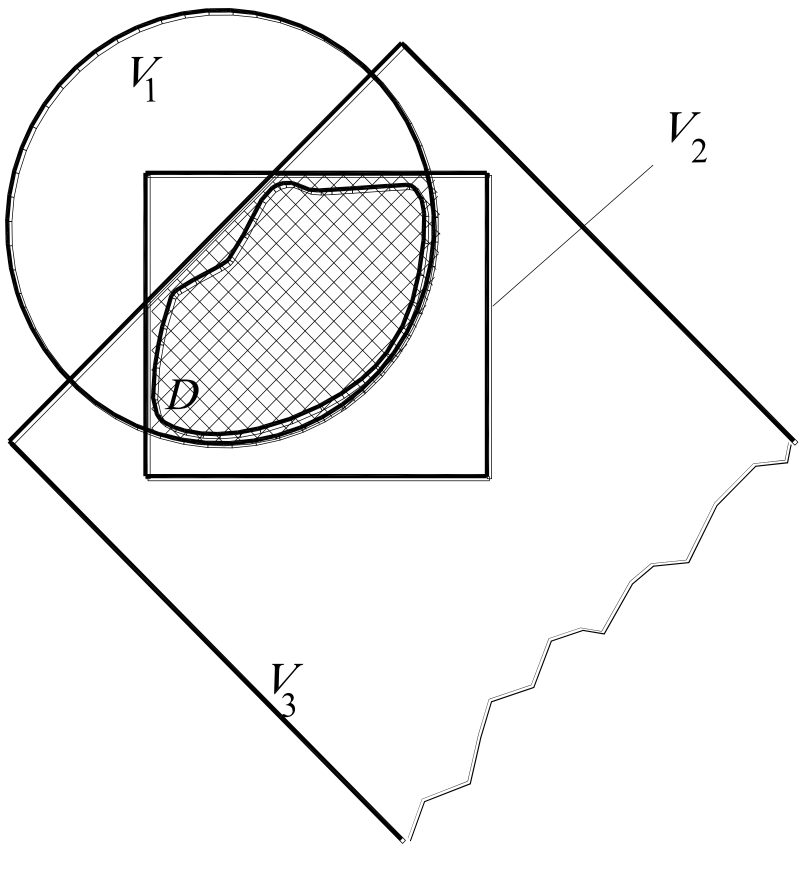


Рис. 1.2 Исходное тело D с границей S вписано в пересечение трех канонических областей V_1 , V_2 и V_3 .

Основной теоремой при выборе ФКО является теорема продолжимости [47, 146, 147]. Приведем ее формулировку.

Теорема продолжимости. При решении краевой задачи для уравнения Лапласа методом фиктивных канонических областей отыскание постоянных коэффициентов базисного разложения является корректной по Адамару задачей в том и только в том случае, если искомое решение может быть гармонически продолжено в какую-либо область V, включающую заданное тело D, для которой имеет место используемое разложение.

Теорема сформулирована и доказана для плоского случая Л.Н. Ясницким. Для общего случая доказательство выполнено С.Я. Гусманом. Доказательство С.Я. Гусмана [47] основано на следующей теореме:

Теорема И.Н. Векуа [18]: Пусть в конечной односвязной области D, ограниченной поверхностью Ляпунова S, задана гармоническая функция $U(\bar{x})$, непрерывная на S. Тогда в конечной области V, содержащей D, можно построить гармоническую функцию $F(\bar{x})$ такую, что для всех $\bar{x} \in D$

$$|F(\bar{x}) - U(\bar{x})| < \varepsilon \tag{1.6}$$

где ε – любое положительное число.

Согласно С.Я. Гусману [47], делается предположение, что область V каноническая, или образована пересечением канонических областей. Тогда для функции $F(\bar{x})$ в V методом Фурье можно построить разложение по гармоническим функциям

$$F(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, f_n(\bar{x}) \tag{1.7}$$

Поскольку, в силу (1.6), функция $F(\bar{x})$ зависит от ε, коэффициенты c_n тоже зависят от ε. Для этих коэффициентов может быть только три возможных случая поведения.

Случай 1. Если существует такая последовательность $\varepsilon_k \to 0$, что для всех n последовательности $c_n(\varepsilon_k)$ имеют при $k \to \infty$ конечные пределы c_n, то эти пределы в силу (1.6) являются коэффициентами ряда, в который раскладывается функция $U(\bar{x})$. Так как это разложение сходится и сумма гармонична, то из этого следует гармоническая продолжимость $U(\bar{x})$ в V.

Случай 2. Если последовательность $c_n(\varepsilon_k)$ для всех n, $k \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ ограничены, то надо иметь в виду, что из всякой ограниченной последовательности всегда можно извлечь сходящуюся подпоследовательность и, значит, из множества $k \to \infty$ можно извлечь такие номера, для которых последовательность $c_1(\varepsilon_k)$ сходится. Из выделенного множества, в свою очередь, можно извлечь подмножество номеров k, для которых сходится последовательность $c_2(\varepsilon_k)$ и так далее. Таким образом, если в разложении (1.7) коэффициенты $c_n(\varepsilon)$ не стремятся к бесконечности при $\varepsilon \to 0$ ни для какого n, то $U(\bar{x})$ может быть гармонически продолжена в V.

Случай 3. Если $U(\bar{x})$ не может быть гармонически продолжена в V, то по крайней мере для некоторых n $c_n(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, так как в противном случае, на основании предыдущих рассуждений, функция $U(\bar{x})$ становится гармонически продолжимой в V. Отсюда следуют два вывода:

1. Поскольку $c_n(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то для таких n сколь угодно малому изменению ε соответствуют большие изменения $c_n(\varepsilon)$, и задача нахождения произвольных постоянных разложения (1.7) становится некорректной по Адамару.

2. Поскольку в практических вычислениях абсолютная величина коэффициентов $c_n(\varepsilon)$ не может быть сколь угодно большой, то значение погрешности решения ε ограничено снизу некоторым положительным числом ε_0, то есть решение краевой задачи с погрешностью меньшей ε_0 в принципе не может быть достигнуто.

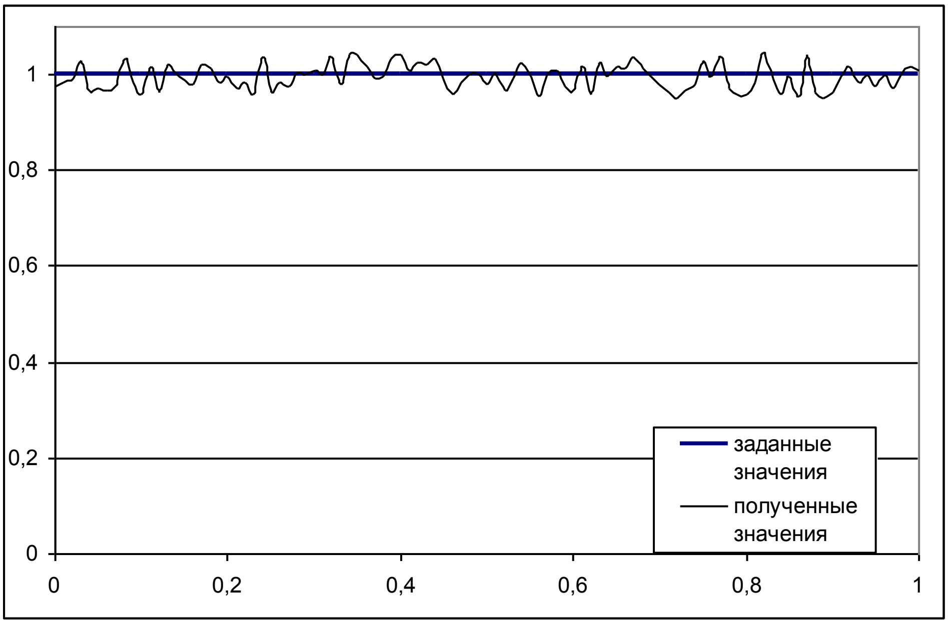
Полученные выводы обобщаются в [47] в виде приведенной выше теоремы продолжимости. Далее в [47, 146, 147] теорема продолжимости распространяется на бигармоническое уравнение, уравнения теории упругости и другие дифференциальные уравнения, общие решения которых, согласно [98, 120-122, 162], линейно выражаются через гармонические функции и их производные. Такое распространение возможно благодаря тому, что область сходимости рядов гармонических функций при дифференцировании не меняется.

Главным преимуществом метода ФКО является возможность простой и надежной оценки полученных решений [36, 146]. Это обусловлено тем, что дифференциальное уравнение удовлетворяется тождественно. Как показано в [146, 147], для задач, в которых выполним принцип максимума (например, стационарных и нестационарных задач теплопроводности) может быть найдено точное значение максимальной погрешности решения. Поскольку максимальное значение искомой функции в этом случае реализуется на границе, то максимальная погрешность удовлетворения граничным условиям будет максимальной погрешностью решения.

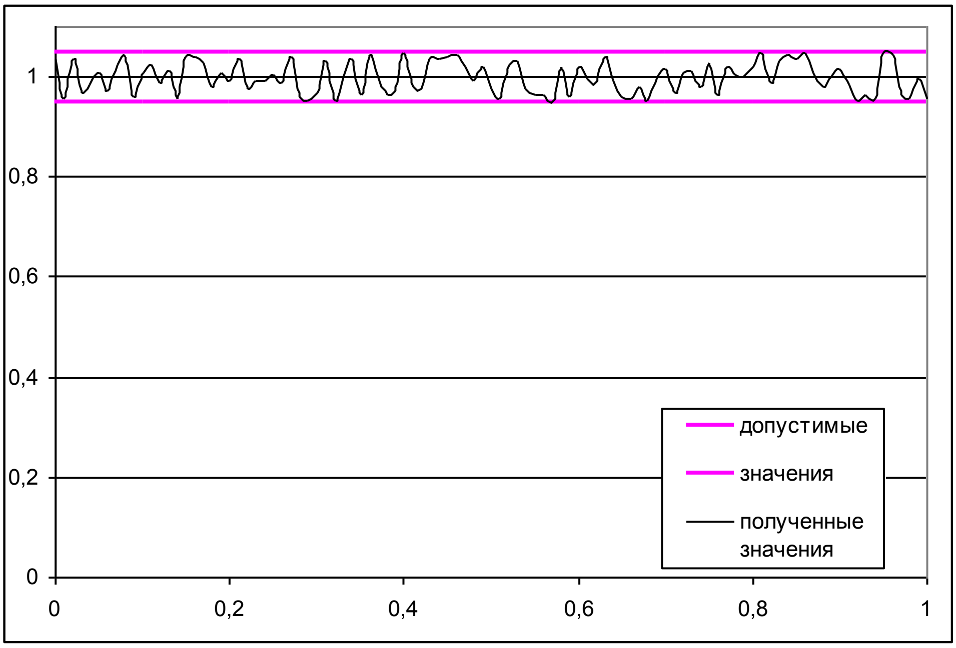
В любом случае, при решении задач методом ФКО, всегда существует возможность восстановить ту краевую задачу, решение которой методом ФКО удается получить точно. Для этого достаточно вычислить полученные в результате решения значения искомой функции на границе S исходного тела D. Пусть мы решаем методом ФКО задачу с некоторыми граничными условиями, и в результате получаем решение задачи с некоторыми измененными, относительно исходных, условиями (рис 1.3 а)

$$B\,U(\bar{x})\,\big|_S = B^{**}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in S\,. \tag{1.8}$$

Во многих реальных задачах, в силу их постановки, допускается отклонение граничных условий на некоторую величину. Это может быть связано, например, с тем, что условия получены при измерении в эксперименте, а измерительные приборы всегда имеют погрешность. То есть допускается некоторый диапазон значений граничных условий (рис 1.3 б). Если невязки краевых условий (то есть разность между B^* и B^{**}) при решении методом ФКО укладываются в допустимые, то вопрос об оценке решения вообще снимается. Фактически, мы получаем точное аналитическое решение краевой задачи (1.1)-(1.8), которая имеет практическое применение. Конечно, данная задача отличается от изначально поставленной своими граничными условиями. Однако, иногда речь может идти об отличии в десятые и сотые доли процента. И, как доказано в теории метода ФКО, если выполняются условия приведенной выше теоремы продолжимости, разность между B^* и B^{**} будет стремиться к нулю, при $N \to \infty$.



а)



б)

Рис. 1.3 Схематичное изображение граничных значений при решении задачи методом ФКО.

1.2 Некоторые типы краевых задач, решаемые методом фиктивных канонических областей

Рассмотрим краевые задачи, для решения которых может применяться метод ФКО.

1.2.1 Стационарная задача теплопроводности

В стационарной задаче теплопроводности искомой функцией является температура, которая при отсутствии тепловых источников удовлетворяет уравнению Лапласа [61]

$$\nabla^2 T = 0, \tag{1.9}$$

где T – температура; ∇^2 – оператор Лапласа. Поскольку уравнение Лапласа является эллиптическим уравнением, для стационарных задач теплопроводности выполняется принцип максимума [128]. Таким образом, при решении стационарных задач теплопроводности методом ФКО, может быть выполнена исчерпывающая оценка точности решения и найдено максимальное отклонение полученного решения от искомого по отклонению граничных значений от заданных.

Для плоских и осесимметричных стационарных задач теплопроводности автором создана библиотека решений для соответствующих канонических областей (круг, кольцо, цилиндр, сфера и др.). Большинство решений взято из литературы, частично решения получены автором. Все решения заложены в разработанную программу REGIONS. Уравнения Лапласа в различных системах координат (СК) для плоских и осесимметричных задач и решения приведены в приложениях.

Рассмотрим основные виды граничных условий, которые могут быть заданы для задач теплопроводности [61, 62].

Условие первого рода – на некоторой части границы тела S_T задано значение температуры T^*

$$T\big|_{S_T} = T^*. \tag{1.10}$$

Условие теплоизоляции (симметрии) – на некоторой поверхности S_S тепловой поток равен нулю

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \overline{n}}\right|_{S_S} = 0, \tag{1.11}$$

где $\overline{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S_S. Здесь следует отметить, что для обеспечения единственности решения краевой задачи данное условие должно быть задано совместно с другими граничными условиями, либо должно быть введено дополнительное интегральное условие, выражающее равенство нулю суммарного теплового потока через поверхность тела [128].

Условие третьего рода – равенство потоков между твердым телом и теплоносителем на границе их контакта

$$\eta \left.\frac{\partial T}{\partial \overline{n}}\right|_{S_\alpha} = \alpha \left(T - T_\alpha\right)\Big|_{S_\alpha}, \tag{1.12}$$

где η – коэффициент теплопроводности тела, α – коэффициент теплоотдачи, T_α – температура теплоносителя.

Условие идеального контакта двух тел – на общей поверхности контакта S^{kl} двух тел D^k и D^l должны быть равны значения температур и нормальных потоков тепла через эту поверхность

$$T^k\Big|_{S^{kl}} = T^l\Big|_{S^{kl}} , \tag{1.13}$$

$$\eta^k \left.\frac{\partial T^k}{\partial \overline{n}}\right|_{S^{kl}} = \eta^l \left.\frac{\partial T^l}{\partial \overline{n}}\right|_{S^{kl}} . \tag{1.14}$$

Приведенные уравнения выражают условие “идеального контакта”. Но могут быть заданы также *условия термического сопротивления* – на границе контакта двух тел имеет место разница потоков тепла, которая пропорциональна разности температур этих тел на границе

$$\eta^k \frac{\partial T^k}{\partial n} - \eta^l \frac{\partial T^l}{\partial n} = \frac{1}{R}\left(T^k - T^l\right), \tag{1.15}$$

здесь R – термическое сопротивление, если оно равно нулю, то (1.15) эквивалентно условиям (1.13)-(1.14).

1.2.2 Статическая задача линейной теории упругости

Дифференциальное уравнение статической задачи линейной теории упругости – уравнение равновесия в напряжениях или перемещениях [82-84, 89, 127]. Второе получается из первого путем выражения компонент тензора напряжений через перемещения, используя геометрические (связь деформаций с перемещениями) и физические (связь напряжений с деформациями) соотношения. В общем виде уравнение равновесия в перемещениях (уравнение Ляме) в векторной форме записывается следующим образом

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,U = F , \tag{1.16}$$

где U – вектор перемещений, F – вектор объемных (массовых) сил, λ и μ – константы Ляме. Уравнения равновесия в напряжениях в декартовой СК (x, y, z) в проекциях на оси координат записываются следующим образом

$$\sigma_{ij,j} = F_i , \quad i, j = x, y, z , \tag{1.17}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Уравнения равновесия, геометрические и физические соотношения для плоских и осесимметричных задач даны в приложениях. Искомой функцией в задачах теории упругости мы будем считать вектор перемещений, поскольку если он известен, то можно найти деформации и напряжения.

Рассмотрим основные виды граничных условий для задач теории упругости.

Кинематические граничные условия. На части поверхности S_U заданы компоненты вектора перемещений U

$$U_i\Big|_{S_U} = U_i^* . \tag{1.18}$$

Статические граничные условия. На части поверхности S_P заданы компоненты вектора усилий P

$$P_i\Big|_{S_p} = P_i^* . \tag{1.19}$$

Компоненты вектора усилий связаны с компонентами тензора напряжений на поверхности с нормалью $\overline{n}$ через компоненты нормали по формуле

$$P_i = \sigma_{ij} n_j . \tag{1.20}$$

Смешанные граничные условия. На части поверхности S_{UP} заданы частично компоненты вектора усилий и частично компоненты вектора перемещений.

Условия симметрии – компонента вектора перемещений в направлении, нормальном части поверхности S_S и вектора напряжений в направлении ей касательном равны нулю

$$P_t \Big|_{S_S} = 0, \tag{1.21}$$

$$U_n \Big|_{S_S} = 0, \tag{1.22}$$

где индексами n и t обозначены нормальное к поверхности и касательное направления соответственно.

Условия совместности для задач теории упругости задают равенство векторов усилий и перемещений на общей границе S^{kl} двух тел D^k и D^l

$$U_i^k \Big|_{S^{kl}} = U_i^l \Big|_{S^{kl}}, \tag{1.23}$$

$$P_i^k \Big|_{S^{kl}} = P_i^l \Big|_{S^{kl}}. \tag{1.24}$$

В практических задачах часто встречается условие *сопряжения двух тел с натягом*, которое отличается от (1.23)-(1.24) тем, что в направлении, нормальном границе раздела задается разница перемещений δ

$$P_n^k \Big|_{S^{kl}} = P_n^l \Big|_{S^{kl}} \tag{1.25}$$

$$P_t^k \Big|_{S^{kl}} = P_t^l \Big|_{S^{kl}} \tag{1.26}$$

$$U_n^k \Big|_{S^{kl}} - U_n^l \Big|_{S^{kl}} = \delta \tag{1.27}$$

$$U_t^k \Big|_{S^{kl}} = U_t^l \Big|_{S^{kl}} \tag{1.28}$$

Вектор объемных сил F действует на все точки тела, поэтому при его наличии задача теории упругости является неоднородной, и необходимо найти частное решение уравнений равновесия для применения метода ФКО. Для общего вида массовых сил это сделать нельзя, однако можно получить решение для некоторых частных случаев. Наиболее часто на практике встречаются силы тяжести и центробежные силы. Компоненты вектора силы тяжести вычисляются по формулам

$$F_i^g = \rho\, g_i \tag{1.29}$$

где ρ – плотность материала, g_i – ускорение свободного падения, действующее в i-ом направлении. Для центробежных сил в декартовой системе координат имеем формулы

$$F_i^{\varpi} = \rho\, \omega_j^2 r_i \quad i \neq j \tag{1.30}$$

где ω_j – угловая скорость вращения вокруг оси j, перпендикулярной оси i, r_i – компонента радиус вектора точки.

Для плоских и осесимметричных статических задач теории упругости автором создана библиотека решений для соответствующих канонических областей (круг, кольцо, цилиндр, сфера и др.). Большинство решений взято из литературы, частично решения получены автором. Все решения заложены в разработанную программу REGIONS. Уравнения равновесия в различных системах координат, а так же геометрические и физические соотношения для плоских и осесимметричных задач и соответствующие решения приведены в приложениях. Так же в приложениях приведены частные решения уравнений равновесия для рассмотренных видов массовых сил.

2 Развитие метода фиктивных канонических областей

2.1 Оптимизация решений в методе фиктивных канонических областей

Успех решения каждой конкретной задачи методом ФКО (достижение малой невязки краевых условий) зависит от выбора и расположения фиктивных областей относительно заданного тела [36, 146]. Решение задачи выбора ФКО для сложных областей и краевых условий доступно лишь высококвалифицированным специалистам и, согласно критерию продолжимости [146], сводится к прогнозированию и исключению особенностей. Это обстоятельство делает недоступным программные продукты, в основе которых лежит метод ФКО, широкому кругу пользователей. Но в настоящее время быстро развивается такая научная область, как искусственный интеллект. Компьютеры, оснащенные экспертными системами (системами искусственного интеллекта) заменяют интеллектуальную деятельность человека во многих областях жизни. Эта тенденция позволяет надеяться, что и решение задачи выбора ФКО можно поручить экспертной системе, что сделает алгоритмы метода ФКО универсальными и общедоступными. Для этого экспертная система должна полностью моделировать интеллектуальную деятельность специалиста-математика: иметь первоначальную базу знаний, накапливать знания и опыт, самообучаться в процессе решения новых задач и т.д. [158-160]. Пока такой системы не существует, но предложенные в настоящей работе алгоритмы оптимизации решений, делают первый шаг к ее созданию, так как позволяют повысить точность решений и накапливать опыт (как положительный, так и отрицательный) применения метода ФКО.

2.1.1 Оптимизация расположения фиктивных канонических областей [1]

Задача формулируется следующим образом: *Пусть для тела D решается краевая задача, выбраны фиктивные области и их начальное расположение. Необходимо изменить положение ФКО с целью обеспечения наилучшего качества решения задачи.* Так как качество решения определяется невязкой краевых условий, то удобно за критерий качества принять значение функционала краевых условий, поскольку оно наиболее полно отражает качество решения задачи и легко обобщается на краевые условия любого вида. Функционал граничных условий имеет сложную структуру и, как показывает опыт, множество локальных минимумов. В задаче оптимизации ставится цель отыскания одного из локальных минимумов, но не обязательно глобального.

Предложенный алгоритм решения поставленной задачи заимствует идею, используемую при создании экспертных систем: он основан на представлении о том, как бы эту задачу стал решать эксперт – человек, имеющий опыт применения метода ФКО. Пусть начальное положение некоторой ФКО определено положением ее центра C_0 (рис. 2.1). Рассматриваются все точки, на расстоянии dl от C_0. Величина dl задается пользователем (является входным параметром алгоритма) и обычно определяется в долях характерного размера l тела D. Далее, методом золотого сечения определяется направление перемещения (угол α_1) центра ФКО на расстояние dl,

[1] Идея оптимизации расположения ФКО предложена Ясницким Л.Н [159,160], настоящий алгоритм разработан и реализован автором работы [39, 43].

обеспечивающее минимальное значение функционала невязки. Центр ФКО помещается в найденную точку C_1 и вычисляется новое значение функционала. Если оно окажется меньше, чем в предыдущем положении, то центр ФКО остается в точке C_1, и далее осуществляются аналогичные итерации. Если же значение функционала уменьшить не удалось, то величина шага dl уменьшается. Степень уменьшения величины dl также является входным параметром алгоритма. После нескольких итераций по одной ФКО она перемещается в некоторую точку C_n. Затем рассматриваются другие ФКО, для которых реализуются аналогичные итерационные алгоритмы, причем величина начального значения шага dl каждый раз восстанавливается. Процесс последовательного перемещения центров фиктивных областей происходит до тех пор, пока значение функционала не уменьшится в заданное число раз, или общее число итераций не превысит максимально допустимое значение.

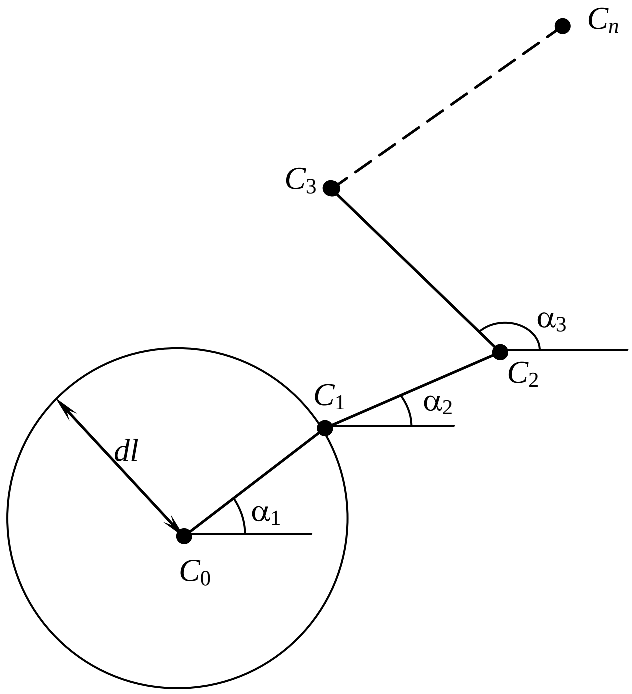


Рис. 2.1 Схема последовательного перемещения ФКО.

Реализация предлагаемого алгоритма в программе REGIONS (см. далее раздел 3.1) выполнена так, что непосредственно во время процедуры оптимизации осуществляется динамическая визуализация хода решения, то есть пользователь в реальном режиме времени получает полную информацию о каждой итерации – схему перемещения ФКО и график изменения значения функционала. Если ход решения не устраивает пользователя, то он в любой момент времени может остановить итерационный процесс, изменить настройки алгоритма (значения входных параметров) и продолжить решение с того же места, на котором оно было остановлено, но с новыми параметрами. Таким образом, в программе REGIONS реализован итерационный динамически настраиваемый алгоритм оптимизации расположения ФКО.

Следует отметить, что данный алгоритм будет эффективен при небольшом числе ФКО. В теории оптимизации показано, что алгоритмы многомерной оптимизации, основанные на одномерных алгоритмах (к таковым относится и предложенный алгоритм), работоспособны при небольшом числе измерений. Численные эксперименты показали, что настоящий алгоритм эффективно работает для небольшого числа ФКО (не более трех), если начальное расположение достаточно близко к локальному минимуму, что продемонстрировано в работе на одном из примеров применения алгоритма.

2.1.1.1 Демонстрация на численном примере

В качестве примера рассмотрим задачу о распределении температуры в поперечном сечении ракетного твердотопливного двигателя, изображенного на рис 2.2. На внешнем контуре области задана температура $T_1 = 20^0 C$, на внутреннем – $T_2 = 300^0 C$.

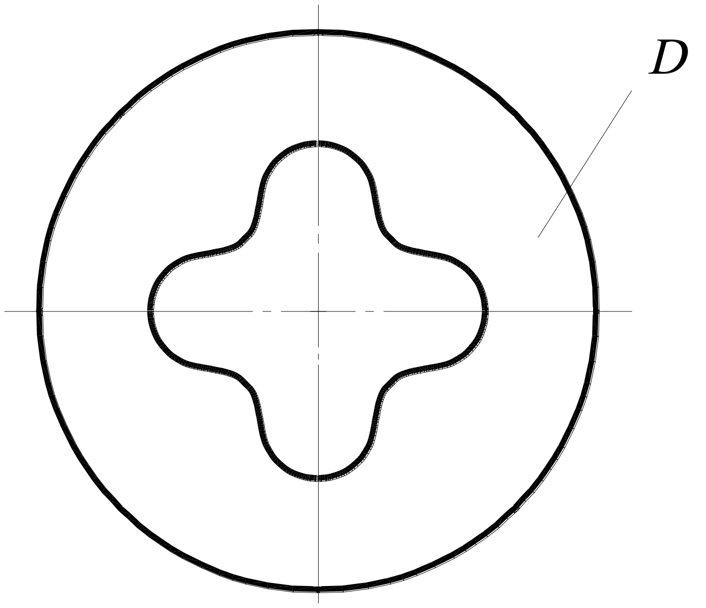


Рис. 2.2 Расчетная область.

Так как задача обладает циклической симметрией, то достаточно рассмотреть 1/8 часть области, задав на соответствующих линиях условие симметрии (теплоизоляции) рис. 2.3.

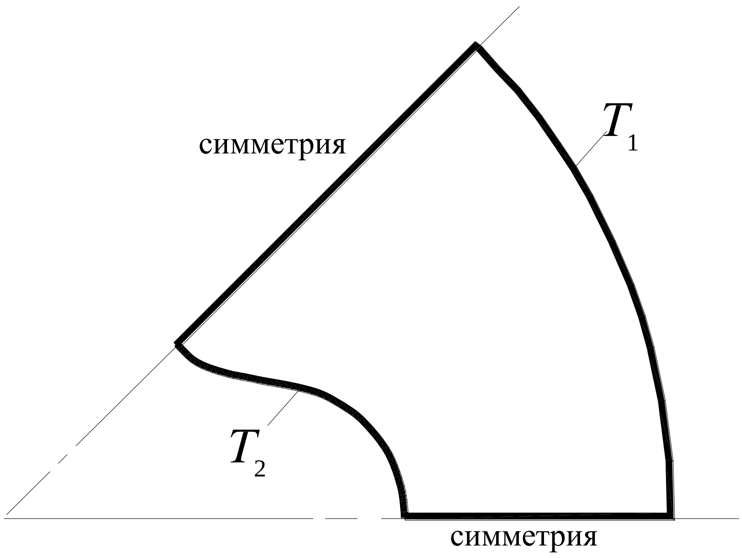


Рис. 2.3 Расчетная схема задачи с учетом симметрии.

При решении задачи методом ФКО в качестве фиктивных областей были выбраны кольцо и круговая полость (см. приложения). Первоначальная схема погружения заданной области D в пересечение кольца V_1 и круговой полости V_2 приведена на рисунке 2.4. Эта схема предложена интуитивно на основании имеющегося опыта решения задач методом ФКО. Фиктивные области расположены так, что, согласно критерию продолжимости [146], предполагаемые особенности искомого решения исключены из пересечения $V_1 \cap V_2$.

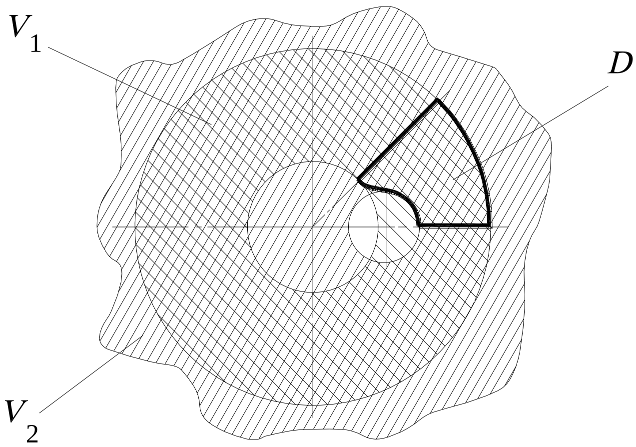


Рис. 2.4 Расчетная область D погружена в пересечение фиктивного кольца V_1 и фиктивной полости V_2. Значение граничного функционала $J = 1{,}37 \cdot 10^{-4}$, значение невязки удовлетворения граничным условиям по температуре $\varepsilon_1 = 2{,}43 \cdot 10^{-4}$, по теплоизоляции $\varepsilon_2 = 1{,}55 \cdot 10^{-5}$

При общем числе слагаемых $N = 55$ максимальная невязка удовлетворения граничным условиям составила по температуре 0,0243%, по условиям теплоизоляции 0,00155%.

Подключение предлагаемой оптимизационной процедуры привело к несколько неожиданному результату. Центр полости, сдвигаясь вверх и влево, почти вплотную приблизился к поверхности заданного тела, как показано на рисунке 2.5. Невязки граничных условий при этом снизились в ~10 раз, обеспечив практически точное решение задачи. Результаты расчета поля температур приведены на рисунке 2.6.

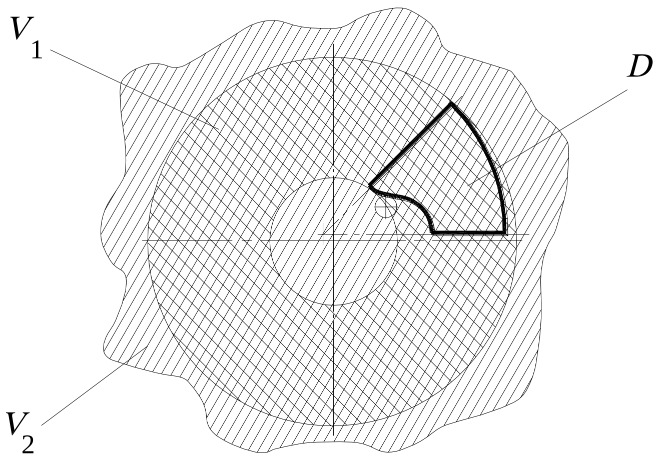


Рис. 2.5 Оптимальное расположение фиктивного кольца V_1 и фиктивной полости V_2, найденное программой REGIONS. $J = 1{,}28 \cdot 10^{-7}$, $\varepsilon_1 = 2{,}48 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 1{,}08 \cdot 10^{-6}$

Данный пример демонстрирует эффективность предложенного алгоритма оптимизации: хотя изначально расположение ФКО было правильным с точки зрения критерия продолжимости, и при увеличении числа слагаемых погрешность также стала бы меньше, данный алгоритм позволил на порядок повысить точность решения без увеличения числа слагаемых.

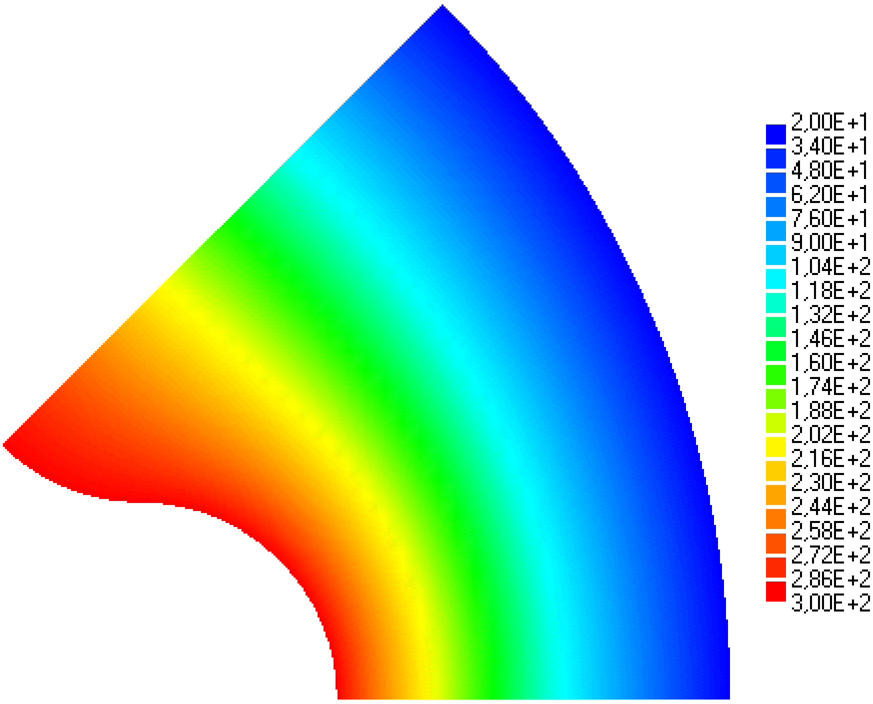


Рис. 2.6 Распределение температуры в расчетной области, полученное программой REGIONS.

2.1.2 Оптимизация базисных разложений [2]

Решение (1.5) канонических областей содержит бесконечное число базисных функций, тождественно удовлетворяющих дифференциальному уравнению задачи. При решении задач методом ФКО ограничиваются некоторым конечным числом N функций из этого решения. Для реальных задач заранее трудно определить, какие из этих N функций требуются для удовлетворения граничным условиям конкретной задачи. Поэтому почти всегда в решении оказываются ненужные функции. Формально, эти функции не должны оказывать влияние на качество решения, так как при нахождении коэффициентов из условия удовлетворения граничным условиям, коэффициенты при данных функциях должны обратиться в ноль. Но, поскольку отыскание коэффициентов ведется численно, они могут принимать значение, отличное от нуля, что приводит к увеличению невязок граничных условий и, как следствие, снижению точности решения. Для устранения этого недостатка предлагается алгоритм удаления ненужных функций из решения. Суть алгоритма в следующем: решается задача методом ФКО с N слагаемыми; определяется, какие из слагаемых (базисных функций) являются ненужными и проводится их удаление; решается задача с оптимальным набором функций. Самое трудное в этом алгоритме – определение, является ли данная функция ненужной (такие функции также называются плеонизмами). Можно предположить, что найденный коэффициент при такой функции должен быть много меньше других, но это не так, потому, что здесь играет роль вид самой функции.

Между тем, задача распознавания и исключение элементов из сложной системы, не влияющих или слабо влияющих на ее поведение, часто встречается в искусственном интеллекте [145]. Так, в программах, моделирующих игру в шахматы, выявляются ходы, не оказывающие существенного влияния на развитие событий на шахматной доске – так называемые «мертвые» вершины дерева возможностей. При проектировании искусственных нейронных сетей выявляются и исключаются нейроны, не оказывающие влияние на решение, принимаемое сетью. В том и другом случаях применяется прием, заключающийся в наблюдении за поведением характеристик системы при поочередном исключении ее элементов. В случае решения краевой задачи методом ФКО такой характеристикой является функционал граничных условий, который представляет собой интеграл по поверхности от квадрата разности между полученным решением и заданными граничными значениями

$$J = \int_S \left(B\,U(\bar{x}) - B^*(\bar{x}) \right)^2 dS\,, \tag{2.1}$$

где $U(\bar{x})$ – полученное методом ФКО решение (1.3).

Если при исключении какой-либо базисной функции величина функционала заметно увеличивается, то эта базисная функция необходима для формирования решения краевой задачи. В противном случае, мы имеем дело с плеонизмом.

Определение ненужности функций проводится по следующей схеме: после определения значений всех коэффициентов вычисляется значение граничного функционала J. Затем один из коэффициентов c_i полагается равным нулю и вычисляется новое значение функционала J_i. Если значение J_i мало отличается от значения J, например, выполняется условие

$$\left| \frac{J - J_i}{J} \right| < \delta\,, \tag{2.2}$$

[2] Алгоритм предложен и реализован автором [43].

где δ – малая положительная величина, то данное слагаемое считается ненужным. Аналогичные действия выполняются для исключения всех слагаемых поочередно. Отметим, что для исключения всех слагаемых, решение задачи (отыскание коэффициентов) выполняется только один раз, поэтому алгоритм является достаточно экономичным по времени.

2.1.2.1 Демонстрация на численном примере

Рассмотрим задачу о напряженно деформированном состоянии области D (рис. 2.7). Внешняя граница свободна от нагрузок, на внутренних отверстиях задано постоянное давление $P = 1{,}6 \cdot 10^6\ Н/м^2$. Так как задача обладает циклической симметрией, ограничимся рассмотрением $^1\!/_3$ части области, задав на соответствующих линиях условия симметрии, рисунок 2.8 (в данном случае достаточно рассмотреть $^1\!/_6$ часть области, но при решении методом ФКО это не дает преимуществ, так как не позволяет уменьшить число необходимых ФКО и число слагаемых в решении). Для решения область была погружена в пересечение двух ФКО – круга V_1 и полости V_2, как показано на рис. 2.9.

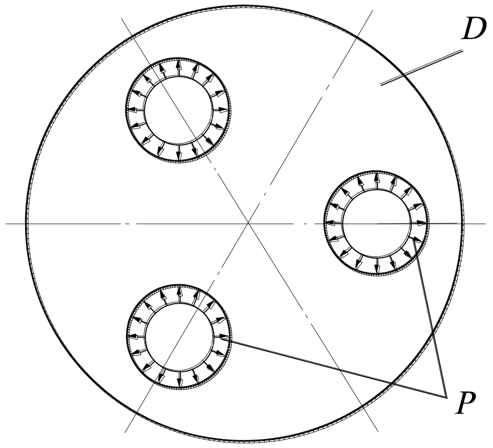


Рис. 2.7 Расчетная схема задачи

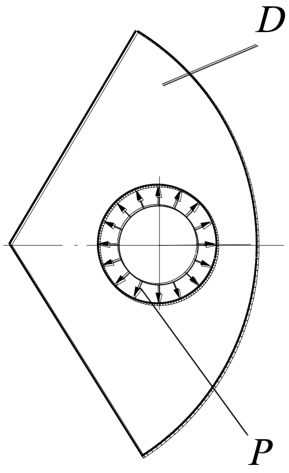


Рис. 2.8 Расчетная схема задачи с учетом симметрии

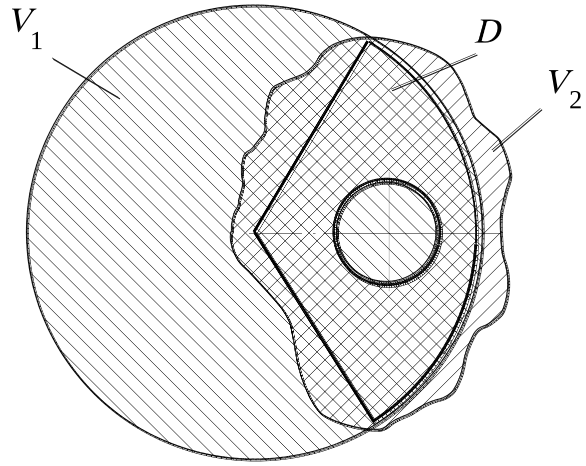


Рис. 2.9 Расчетная область D погружена в пересечение фиктивного круга V_1 и полости V_2

При общем числе слагаемых $N = 80$ максимальные невязки удовлетворения граничным условиям имели следующие значения: по перемещениям $\varepsilon_1 = 0{,}255\,\%$, по напряжениям $\varepsilon_2 = 0{,}351\,\%$. После оптимизации решения выше изложенным алгоритмом (удаления ненужных функций) невязки граничных условий уменьшились более чем в 100 раз (!) и составили $\varepsilon_1 = 0{,}00227\,\%$ и $\varepsilon_2 = 0{,}00173\,\%$. Значения интенсивности напряжений, полученные по результатам расчета, приведены на рисунке 2.2.10.

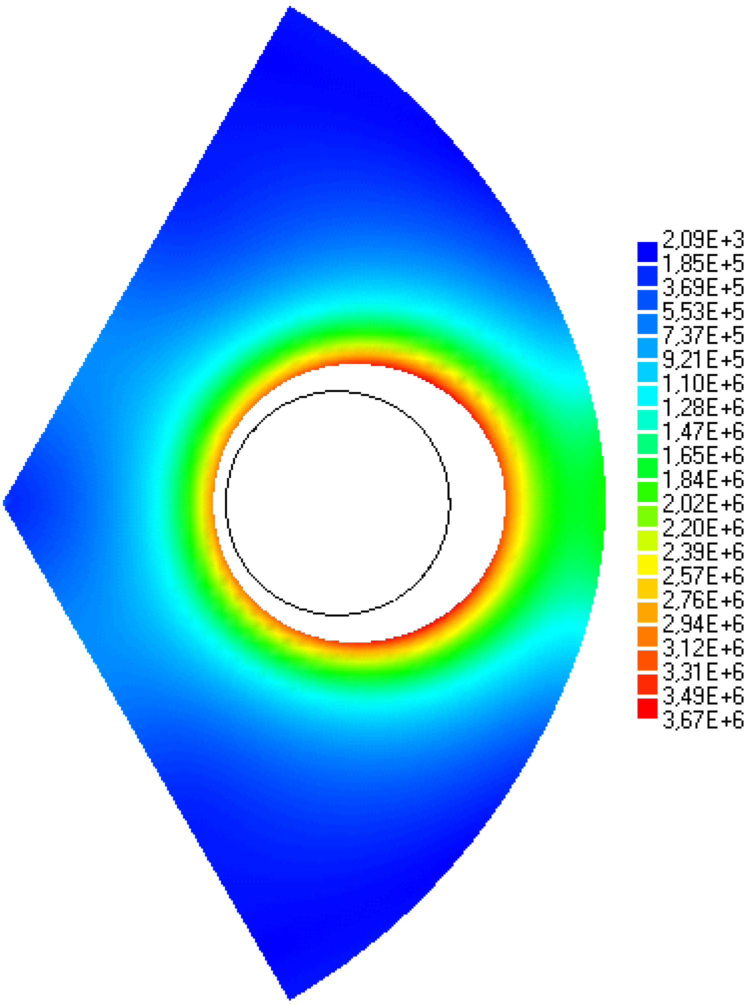


Рис. 2.10 Интенсивность напряжений в расчетной области (Н/м^2, на деформированном состоянии в увеличенном масштабе)

Данный пример показывает эффективность предложенного алгоритма оптимизации решения с помощью исключения ненужных базисных функций. Алгоритм позволяет существенно уменьшить невязки краевых условий без увеличения числа слагаемых ФКО. Также, алгоритм может быть использован для накопления опыта применения метода ФКО, то есть для выявления базисных функций, которые должны быть использованы для тел той или иной топологии. В дальнейшем такой опыт может быть использован для создания экспертной системы, моделирующей деятельность математика при решении краевых задач.

2.1.3 Оптимизация весовых коэффициентов [3]

При отыскании неизвестных коэффициентов базисных функций ФКО (а точнее, при формировании СЛАУ) методом наименьших квадратов могут быть введены весовые коэффициенты граничных условий, которые определяют значимость удовлетворения граничных условий на разных участках поверхности (того или иного вида граничных условий) [43]. Для этого поверхность тела разбивается на участки, и функционал граничных условий (2.1) представляется в виде суммы

$$J = \sum_{i=1}^{N} k_i \int_{S_i} \left(B\,U(\bar{x}) - B^*(\bar{x}) \right)^2 dS\,, \tag{2.3}$$

где N – число участков, на которые разбита граница области, k_i – весовой коэффициент на i-ом участке поверхности.

При увеличении весового коэффициента k_i, граничное условие на i-ом участке поверхности удовлетворяется точнее, а точность удовлетворения на остальных участках снижается. Такие весовые коэффициенты можно задать на любой части границы. Обычно, изначально все они задаются равными единице. При этом в некоторых задачах невязки граничных условий распределяются неравномерно по границе области. Поэтому имеет смысл создание алгоритма оптимизации весовых коэффициентов, с целью равномерного распределения невязок. Предложен (и реализован в программе REGIONS) итерационный алгоритм, заимствующий идею правила Хэбба, используемого для обучения персептрона [145]. Его идея в следующем: решается задача с начальными весовыми коэффициентами. На каждом участке границы вычисляются невязки граничных условий ε_i, $i = \overline{1, N}$ (максимальные или среднеинтегральные) и их среднее значение

$$\varepsilon_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i\ . \tag{2.4}$$

Вычисляются отклонения невязок на каждом участке от среднего. Если они все меньше заданной величины, то итерации прекращаются. Иначе задаются новые значения весовых коэффициентов по одной из формул

$$k_i^j = k_i^{j-1} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_m} \tag{2.5 a}$$

или

$$k_i^j = k_i^{j-1} + \eta \left(\varepsilon_i - \varepsilon_m \right)\,, \tag{2.5 $б$}$$

где k_i^j и k_i^{j-1} – весовые коэффициенты на участке границы i на итерациях j и $j-1$ соответственно, η – коэффициент скорости обучения [145]. Снова решается задача с уточненными коэффициентами. Итерации по формулам (2.4) или (2.5) продолжаются до тех пор, пока отклонения всех невязок от среднего значения не станут меньше заданной величины.

[3] Алгоритм предложен Ясницким Л.Н. и реализован автором работы [43].

2.1.3.1 Демонстрация на численном примере

На рисунке 2.11 изображена расчетная область задачи. На двух линиях границы заданы условия симметрии, на внутренних отверстиях – перемещения, линейно меняющиеся вдоль оси x: $U_x^1 = 0{,}0005$; $U_x^2 = 0{,}0008$; $U_x^3 = 0{,}0020$; $U_x^4 = 0{,}0023$.

При всех весовых коэффициентах равных единице, максимальные невязки удовлетворения граничным условиям составили: по перемещениям $\varepsilon_{U\,\max} = 2{,}9\,\%$, по напряжениям $\varepsilon_{F\,\max} = 0{,}5\,\%$. После оптимизации они соответственно составили $\varepsilon_{U\,\max} = 0{,}64\,\%$, $\varepsilon_{F\,\max} = 0{,}78\,\%$. Для оптимизации потребовалось семь итераций. Результаты решения задачи (напряжение σ_x и интенсивность напряжений) приведены на рисунках 2.12 и 2.13. Приведенные значения невязок граничных условий до и после оптимизации показывают правильность алгоритма и возможность его эффективного применения для более равномерного распределения этих невязок по границе области.

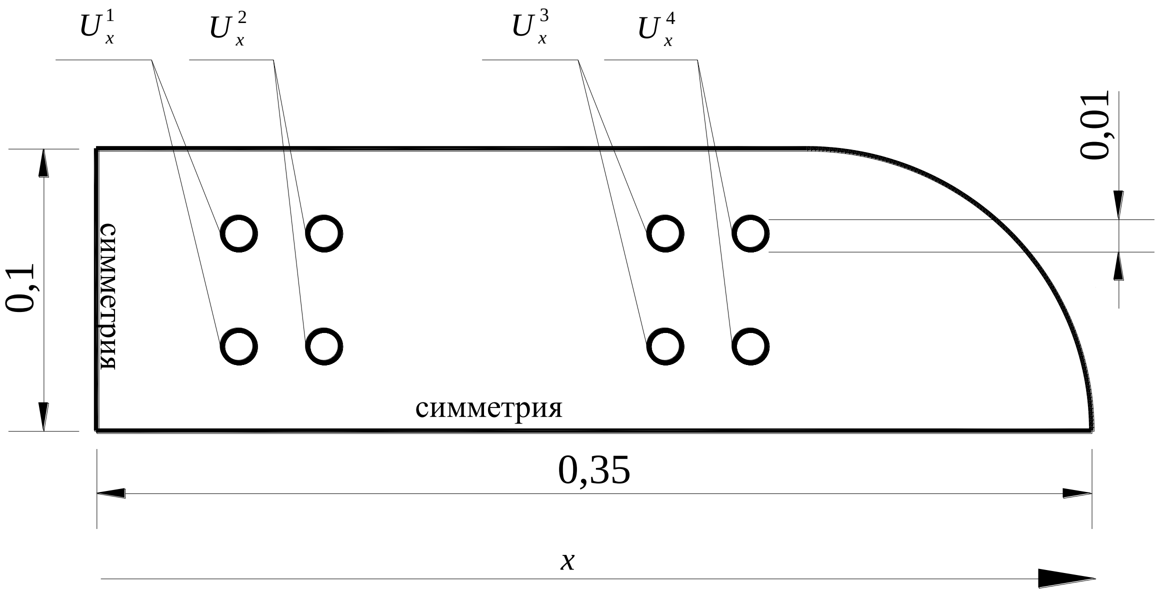


Рис. 2.11 Расчетная схема задачи

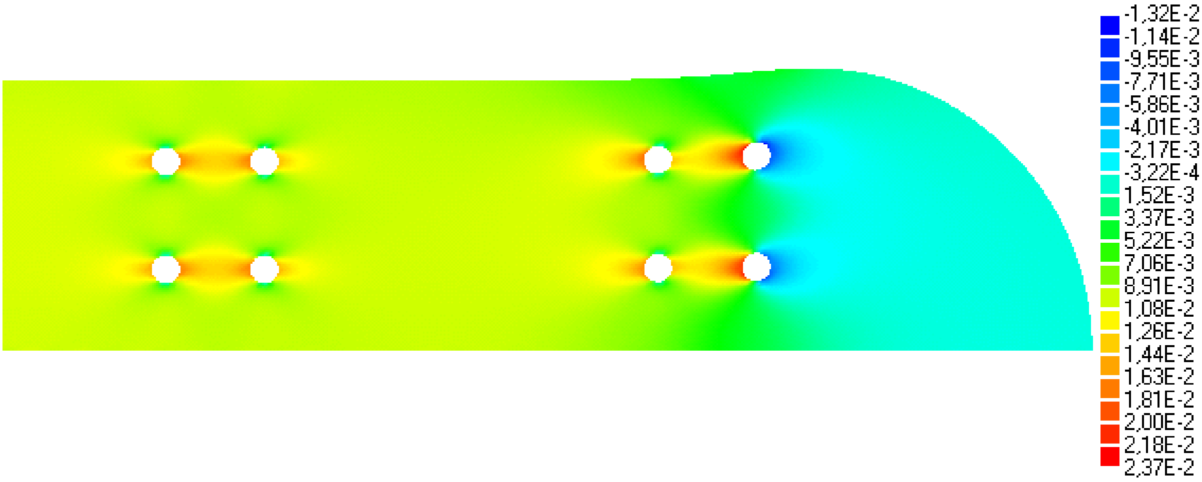


Рис. 2.12 Напряжение σ_x (на деформированном состоянии в увеличенном масштабе)

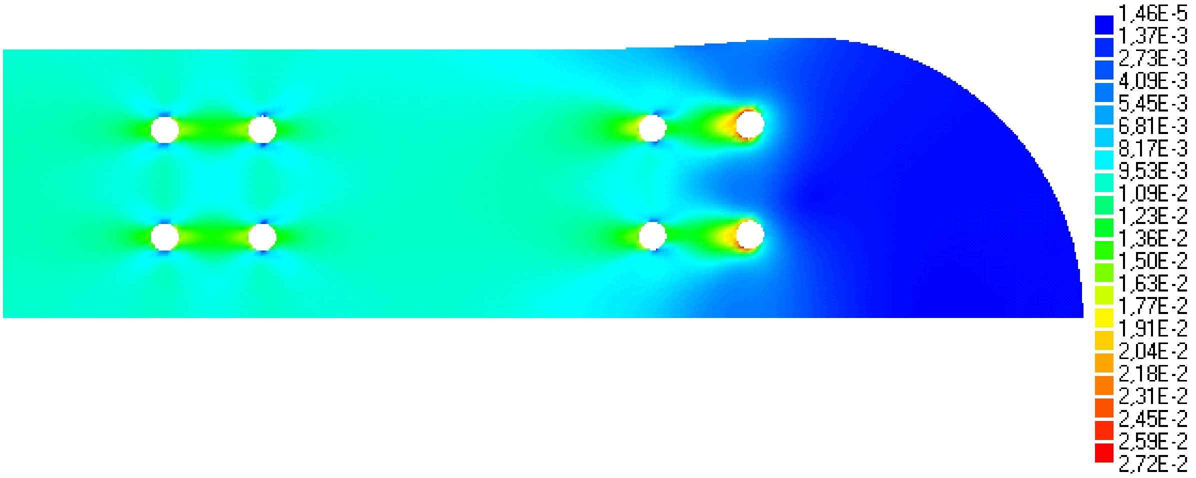


Рис. 2.13 Интенсивность напряжений

2.1.4 Оптимизация решений с разрывными граничными условиями: метод игнорирования ε-окрестности [4]

Как известно, все математические модели являются некоторой идеализацией реальных явлений, что часто приводит к некорректности постановки и проблемам при практическом решении поставленной задачи. Например, во многих задачах математической физики приходится иметь дело с разрывными краевыми условиями. На рисунке 2.14 изображен типичный пример разрывного условия.

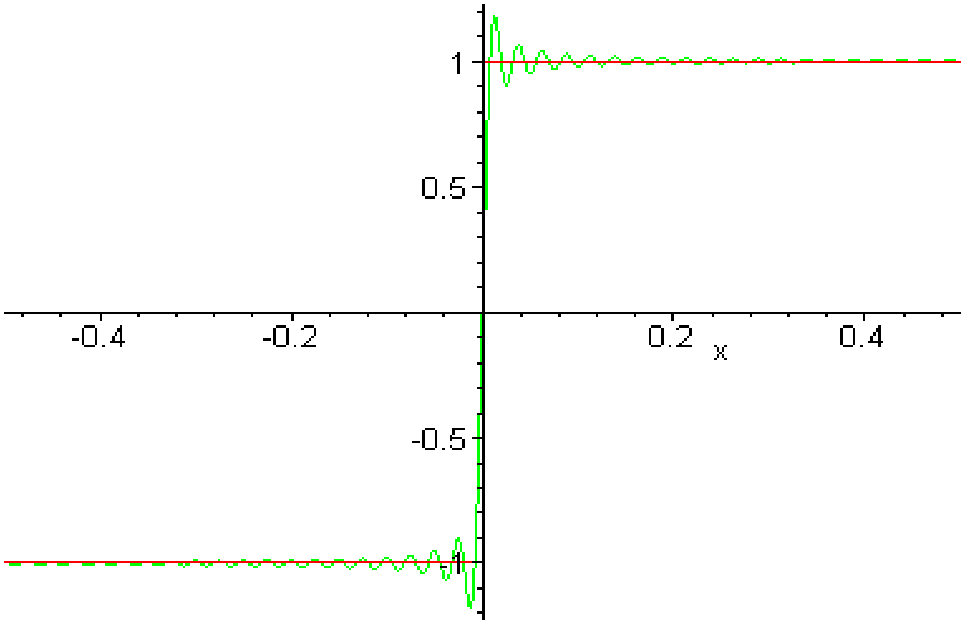


Рис. 2.14 Пример разрывного условия (красная линия) и его разложения в ряд Фурье (зеленая линия) вблизи особой точки

Функция имеет разрыв первого рода, и ее градиент в точке разрыва должен быть бесконечным. Для некоторых методов решения краевых задач такая ситуация “не представляет трудностей”. Например, для МКЭ, градиент функции будет напрямую зависеть от дискретизации вблизи точки разрыва. Для МГЭ разработаны специальные типы граничных элементов [9]. Для метода ФКО такие условия представляют серьезную проблему, так как здесь применяется разложение в ряды. На рис 2.14 приведен типичный пример разложения разрывной функции в ряд Фурье без применения специальных алгоритмов. Вблизи точки разрыва наблюдается скачок – так называемый эффект Гиббса [133].

Примерно то же самое будет происходить и при решении краевых задач с разрывными граничными условиями методом ФКО. Обычно, при наличии разрывов в граничных условиях, для реализации больших градиентов, исходное тело погружают в сингулярную ФКО (то есть ФКО, решение (1.5) для которой содержит особенность) и располагают ее таким образом, что особенность ФКО находится рядом с особой точкой и вне тела, как показано на рис 2.15.

---

[4] Метод игнорирования ε-окрестности предложен автором работы.

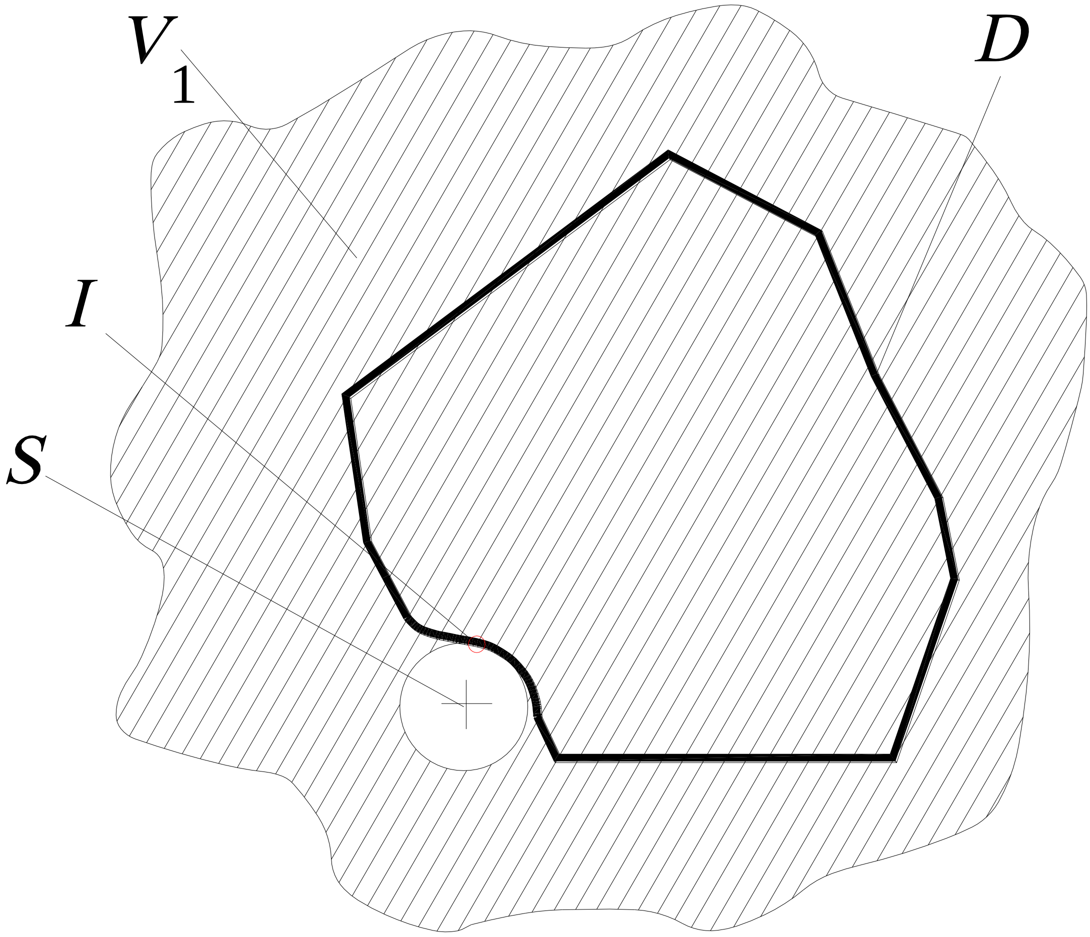
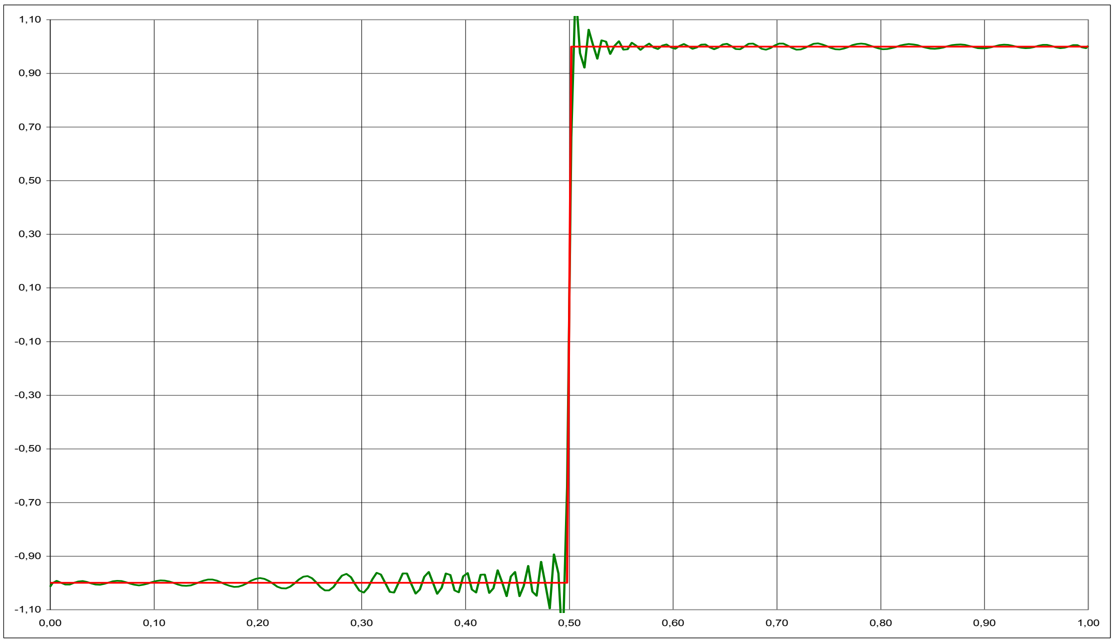


Рис. 2.15 Обычное расположение сингулярной области V_1 с особенностью в точке S при наличии разрывного граничного условия в точке I на поверхности тела D

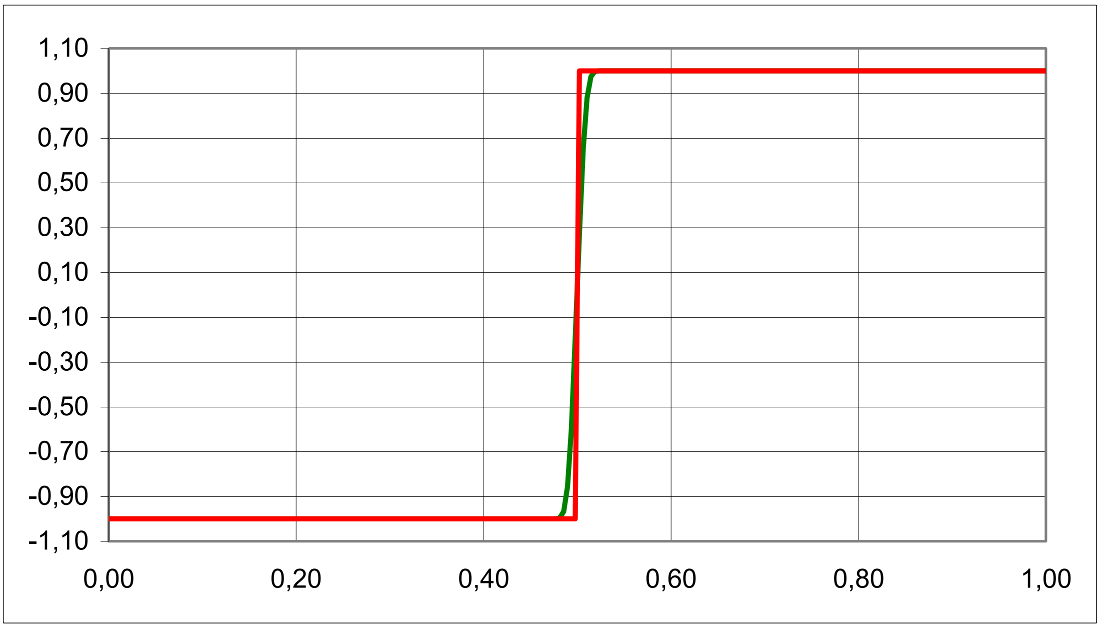
Однако, вследствие эффекта Гиббса, чем больший градиент мы пытаемся реализовать, тем больше скачок получаем вблизи точки разрыва. В практических же задачах желательно реализовать высокий градиент, но при этом скачок в особой точке должен быть равен заданной величине разрыва функции. Для этой цели предлагается метод, который назван *метод игнорирования* ε*-окрестности*, и его идея сразу следует из названия: при удовлетворении разрывного краевого условия некоторая малая ε-окрестность точки разрыва просто не рассматривается (игнорируется).

Здесь может возникнуть вопрос о корректности такого подхода – по сути, мы сформулировали отличную от поставленной изначально краевую задачу, да к тому же с незамкнутой границей (вопрос о единственности решения). Но этот вопрос снимается в принципе после решения. Поскольку дифференциальное уравнение задачи удовлетворяется тождественно, в любом случае такое решение можно оценить, сравнивая полученные в ходе решения и заданные в исходной постановке краевые условия.

На рисунке 2.16 приведены результаты решения плоской стационарной задачи теплопроводности с разрывным граничным условием, полученные программой REGIONS без применения специальных методов и с применением метода игнорирования ε-окрестности.



а)



б)

Рис. 2.16 Задача с разрывным граничным условием: красная линия – заданное значение, зеленая – полученное в результате решения
а) без использования специальных методов *б)* с использованием метода игнорирования

Как видно из результатов, эффект Гиббса полностью устранен и решение, полученное с использованием метода игнорирования можно считать практически точным, что нельзя сказать о первом решении.

Естественно, что выбор размера (диаметра) игнорируемой окрестности для получения качественного решения вблизи особой точки будет зависеть от конкретной задачи и требований исследователя. Качество решения определяется максимальным отклонением размаха искомой функции, полученного при решении, от заданной величины разрыва в особой точке. Требования исследователя определяют величину градиента вблизи точки разрыва. Величина градиента будет зависеть от степени сингулярности ФКО и от расстояния от точки разрыва и особенности ФКО.

Пусть для некоторой задачи выбрано расположение сингулярной ФКО, и необходимо найти размер ε-окресности, обеспечивающий лучшее качество решения. При стремлении размера ε-окрестности к нулю мы придем к исходной задаче, то есть получим эффект Гиббса. При увеличении ε задача станет некорректной – в игнорируемой области мы допускаем любые краевые условия, и опыт показывает, что при некотором ε качество решения резко падает. Таким образом, можно заключить, что существует оптимальный диаметр окрестности (конечный и не равный нулю), соответствующий наилучшему качеству решения при выбранном расположении ФКО.

Представляет интерес исследование оптимального размера окрестности игнорирования от величины требуемого градиента. Конечно, такая зависимость будет своя для каждой конкретной задачи, но общий вид зависимости можно распространить на класс задач (теплопроводности, теории упругости и т.д.). Были проведены расчеты зависимости оптимального диаметра ε-окресности от расстояния сингулярной ФКО до точки разрыва граничного условия для плоской задачи теплопроводности. При фиксированном числе слагаемых для ФКО, чем больше расстояние, тем меньший градиент можно реализовать в особой точке. Результат приведен на рисунке 2.17. Эту зависимость можно использовать при применении метода игнорирования для решения плоских задач теплопроводности с разрывными граничными условиями.

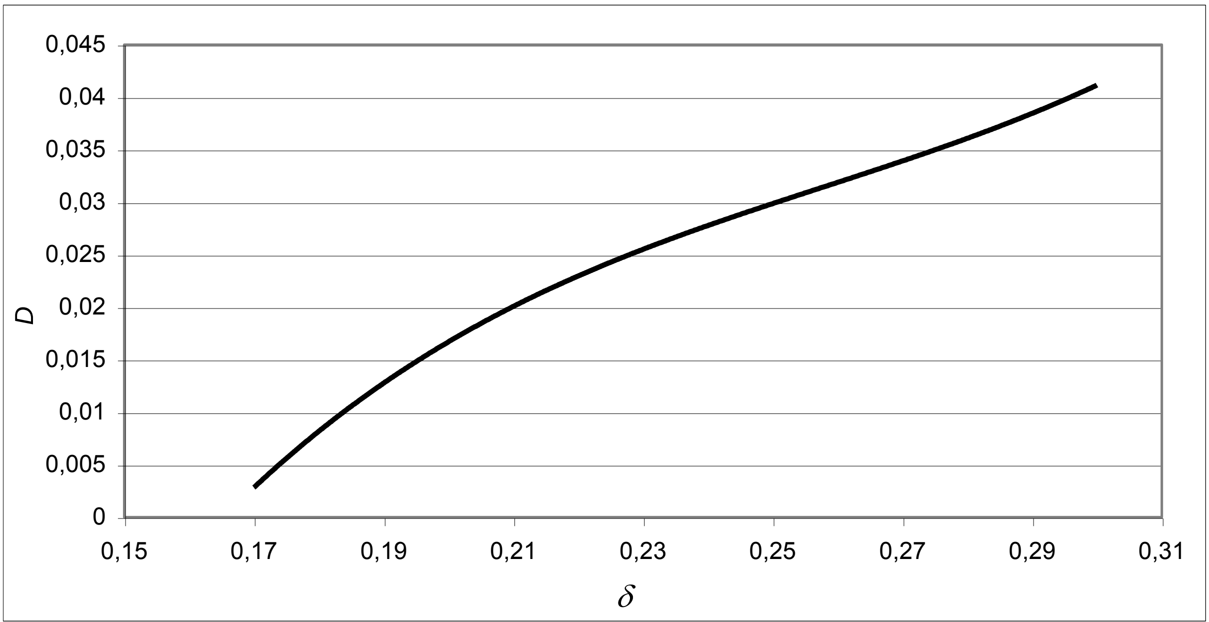


Рис. 2.17 Зависимость оптимального диаметра D ε-окрестности от расстояния δ сингулярной точки ФКО до точки разрыва граничного условия

Аналогичные зависимости могут быть построены для других классов задач и использованы затем при решении. Это в частности удобно сделать в среде REGIONS с использованием внутреннего языка программирования на задачах с простой геометрией.

Предложенный метод обладает простотой, как в понимании, так и в программной реализации, что важно при разработке универсальных программ. При этом метод позволяет полностью устранить эффект Гиббса вблизи особой точки, а так же повысить точность на остальных участках границы.

Из всех приведенных результатов решений тестовых задач можно сделать вывод о том, что применение всех предложенных и реализованных алгоритмов оптимизации и алгоритма метода игнорирования ε-окрестности позволяет существенно увеличить точность решения краевых задач, что делает метод ФКО более универсальным.

2.2 Решение нестационарных задач теплопроводности методом фиктивных канонических областей

Рассмотрим постановку нестационарной задачи теплопроводности. Нестационарное распределение температуры в твердом теле описывается дифференциальным уравнением [61], которое, при отсутствии источников тепла имеет вид

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0\,, \tag{2.6}$$

где τ – время; α – коэффициент температуропроводности. Граничные условия для нестационарной задачи теплопроводности аналогичны условиям для стационарной задачи, но должны быть удовлетворены на некотором промежутке времени. Также необходимо задать начальное условие – распределение температуры в теле D в начальный момент времени τ_0

$$T\big|_{\tau=\tau_0} = T^0\,. \tag{2.7}$$

Для нестационарных задач теплопроводности также выполняется принцип максимума [128]. Таким образом, как и при решении стационарных задач теплопроводности, метод ФКО позволяет получить полную оценку точности решения по отклонению граничных значений от заданных.

В настоящей работе впервые рассматривается решение нестационарных задач теплопроводности методом ФКО. Для применения метода ФКО к данным задачам необходимо иметь набор общих решений уравнения (2.6), относящихся к различным типам канонических областей. Автором получены такие решения для плоской нестационарной задачи теплопроводности в декартовой и цилиндрической системах координат (СК). Все решения получены методом разделения переменных Фурье. Из данных решений могут быть сформированы решения для таких канонических областей как круг, кольцо, круговая полость и слой (см. приложения).

Покажем, что можно применять метод ФКО для решения нестационарных задач теплопроводности с подвижными границами. Уточним, что речь идет о задачах, в которых закон изменения границы известен до решения краевой задачи, то есть задачи отыскания этого закона, и распределения температуры не являются связанными. Нестационарная задача отличается от стационарной появлением зависимости от времени. Фактически, это означает увеличение размерности задачи на единицу, и время рассматривается как одно из измерений. При этом в постановке задачи нет ограничения на постоянство границы S тела D по времени. Естественно, что выбор ФКО для таких задач будет более сложным, а необходимое число слагаемых больше. Однако, здесь важна сама возможность решения таких задач.

Полученные автором общие решения нестационарных уравнений теплопроводности заложены в программу REGIONS. Организация программы позволяет решать задачи с изменяющимися границами. Формирование системы разрешающих уравнений методом наименьших квадратов для нестационарных задач включает интегрирование по времени. Интегрирование осуществляется численно, суммированием матриц на выбранных шагах по времени. Программа позволяет вычислять матрицы отдельно, на каждом шаге и хранить их в оперативной памяти или на жестком диске. Граница и краевые условия при этом могут меняться. Для таких задач удобно также применять внутренний язык программирования программы REGIONS.

Для иллюстрации возможности решения нестационарных задач теплопроводности с подвижной границей методом ФКО рассмотрим следующую модельную задачу. На рисунке 2.18 дана расчетная схема нестационарной задачи с изменяющейся границей. Расчетная область ограничена двумя окружностями радиусов R_0 и R_1 с эксцентриситетом e. На внешней поверхности задана температура T_0, на внутренней – условия третьего рода с температурой теплоносителя T_1 и коэффициентом теплоотдачи a_1. Начальное условие – постоянная температура T_0. За промежуток времени $\tau = \tau_1 ... \tau_2$ радиус внутренней поверхности меняется линейно со временем от значения R_{11} до R_{12}.

Для автоматического решения данной задачи написана программа на внутреннем языке программирования, которая позволяет менять все указанные выше параметры геометрии, граничных условий и т.д. Решена задача для следующих значений (все параметры указаны в безразмерном виде): $R_0 = 1$, $R_{11} = 0{,}2$, $R_{12} = 0{,}25$, $e = 0{,}2$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$, $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$. Коэффициент температуропроводности области принят равным $0{,}1$. Также решена аналогичная задача без изменения границы, то есть $R_{11} = R_{12} = 0{,}2$. На рисунке 2.19 приведены результаты для этих задач: изменение температуры в точке $x = -0{,}5$ $y = 0$. Как и следовало ожидать, при движении границы к точке наблюдения, температура повышается быстрее, нежели в задаче без учета изменения границы.

Расчетная область и граничные условия задачи не являются сложными, и данный пример демонстрирует лишь принципиальную возможность решения методом ФКО нестационарных задач, а также возможность программной реализации. Решение нестационарных задач теплопроводности с подвижной границей может быть использовано, например, для расчета температур при горении твердого топлива.

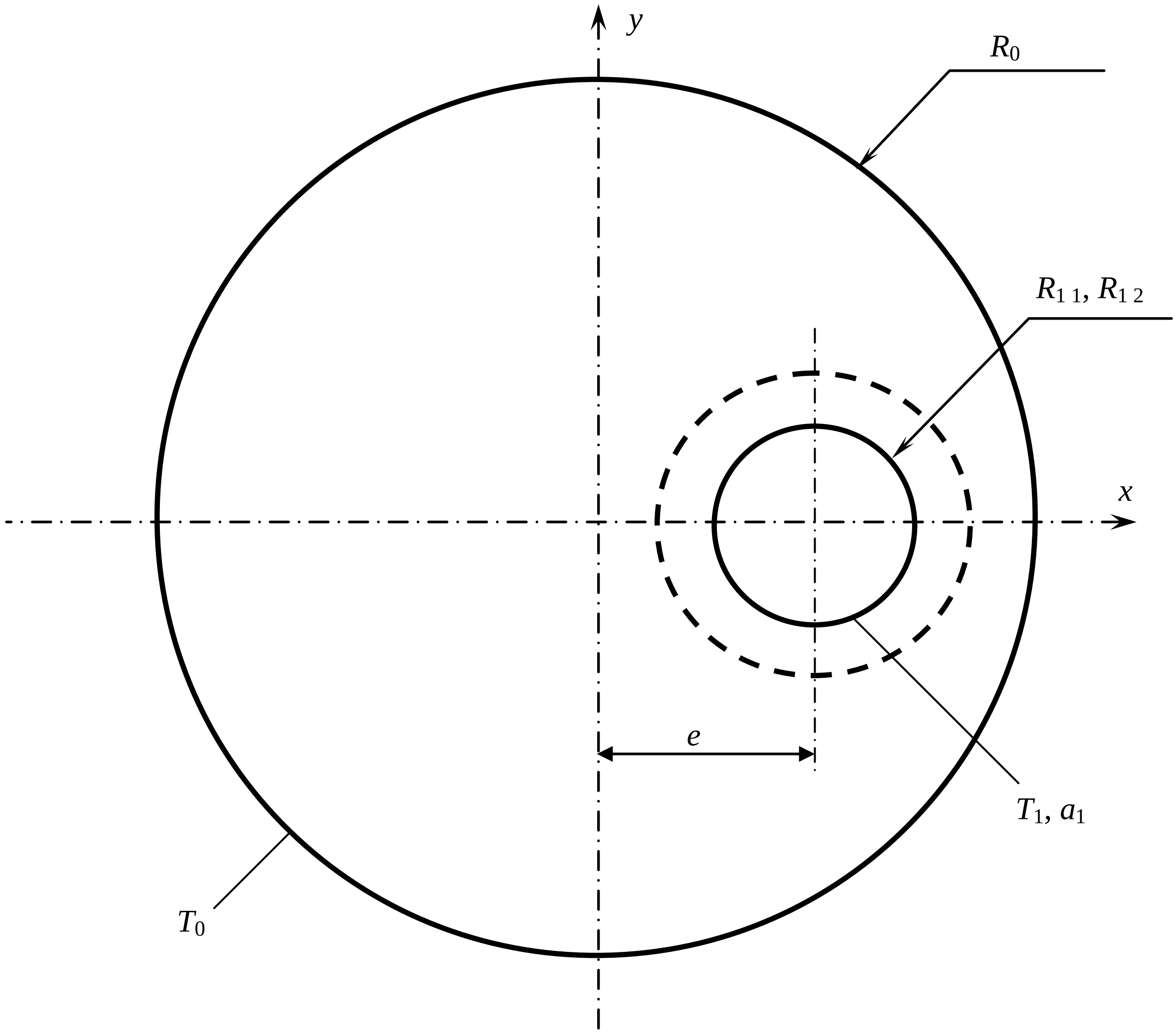


Рис. 2.18 Расчетная схема задачи нестационарной теплопроводности с подвижной границей

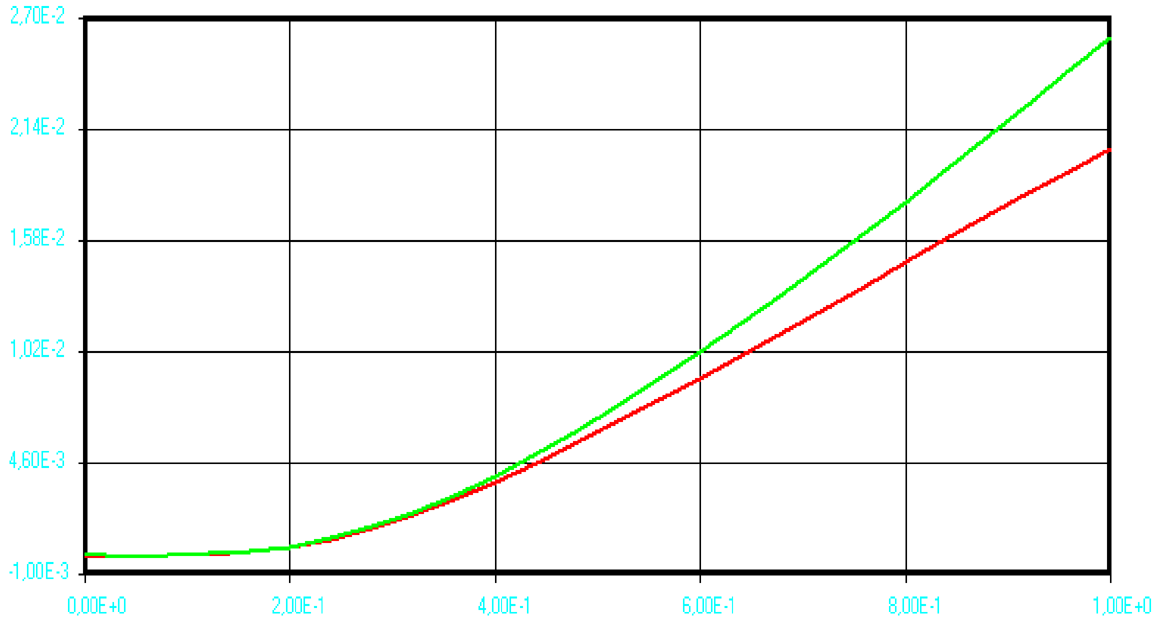


Рис. 2.19 Результаты расчета – изменение температуры в точке $x = -0{,}5$ $y = 0$.
(красная линия – без изменения границы, зеленая – с изменением)

2.3 Решение статических несвязанных задач линейной термоупругости методом фиктивных канонических областей

Уравнение равновесия в перемещениях для статической несвязанной задачи линейной термоупругости записывается следующим образом

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U = F + \alpha (3\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} T , \tag{2.8}$$

где T – температура; α – коэффициент температурного расширения. Это уравнение отличается от векторного уравнения Ляме (1.15) дополнительным свободным членом, зависящим от температуры. Это обусловлено тем, что деформации зависят не только от напряжений, но и от температурного расширения. Таким образом, уравнения термоупругости, даже при отсутствии массовых сил F, являются неоднородными. Общее решение однородного уравнения (2.8) совпадает с решением однородного уравнения Ляме. Но для решения краевых задач термоупругости методом ФКО необходимо найти также частное решение неоднородного уравнения

$$\mu \Delta U + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U = \alpha (3\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} T . \tag{2.9}$$

В общем случае это сделать нельзя. Автором предложен следующий подход: если задача теплопроводности решена также методом ФКО, функция температур представлена в виде конечной суммы

$$T(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{N} c_n^t \, t_n(\bar{x}). \tag{2.10}$$

Тогда частное решение (см. (1.3)) уравнения (2.9) можно записать также в виде суммы

$$U^R(\bar{x}) = \sum_{n=1}^{N} c_n^t \, \lambda_n(\bar{x}), \tag{2.11}$$

в которой функции $\lambda_n(\bar{x})$ находятся из уравнений

$$\mu \Delta \lambda_n + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \lambda_n = \alpha (3\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} t_n , \tag{2.12}$$

полученных в результате подстановки (2.10) и (2.11) в (2.9).

Таким образом, можно решать несвязанные задачи термоупругости, используя распределения температур, полученные как решение методом ФКО соответствующих задач теплопроводности.

Для решения плоских и осесимметричных задач термоупругости автором получены необходимые частные решения $U^R(\bar{x})$ уравнений термоупругости, соответствующие общим решениям уравнений теплопроводности. Для плоских задач (плосконапряженное и плоскодеформированное состояния) получены решения в декартовой и цилиндрической СК, для осесимметричных – в цилиндрической и сферической системах. Полученные решения (а так же физические соотношения) для плоских и осесимметричных задач даны в приложениях. Данные решения позволяют применять все базовые канонические области (кольцо, круг, бесконечный слой, цилиндр, сферу и т.д.) для решения задач термоупругости. Все решения заложены в базу ФКО программы REGIONS, реализован алгоритм решения задач термоупругости.

С помощью программы REGIONS решена модельная термоупругая задача о распределении напряжений в сечении твердотопливного двигателя в плоской постановке (плоскодеформированное состояние). Расчетная область состоит из двух областей D_1 и D_2 (рис 2.20) с различными свойствами. Первая область – резиноподобный материал, внешняя оболочка – стальная. На внутренней поверхности области D_1 задано постоянное давление P и температура T_1, на внешней поверхности оболочки D_2 – температура T_2. На поверхностях взаимодействия областей заданы условия совместности. В силу циклической симметрии достаточно рассмотреть 1/8 часть области. Для решения методом ФКО внутренняя область была погружена в пересечение круга и двух полостей, согласно оптимальной схеме, полученной при оптимизации (см. рис. 2.5), область D_2 погружена в кольцо.

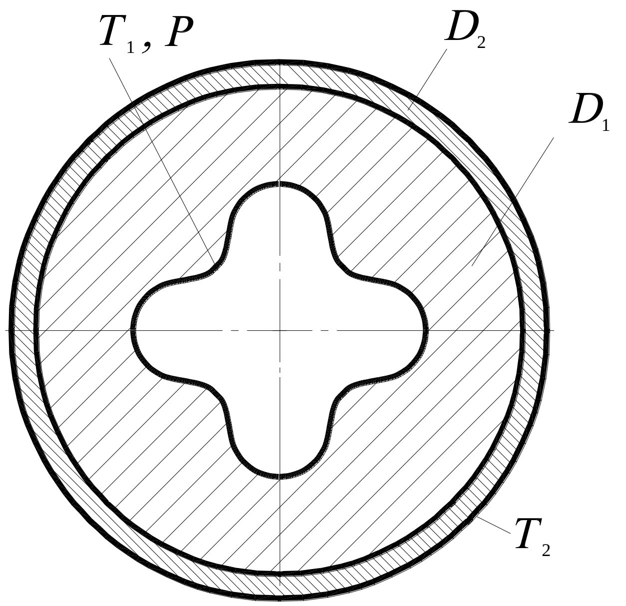


Рис 2.20 Расчетная схема термоупругой задачи

Задача решена для следующих значений (в безразмерном виде): модули упругости $E_1 = 0{,}01$, $E_2 = 1$; коэффициенты Пуассона $\nu_1 = 0{,}499$, $\nu_2 = 0{,}3$; коэффициенты температурного расширения $\alpha_{t1} = 2$, $\alpha_{t2} = 1$; коэффициенты теплопроводности $\alpha_1 = 0{,}1$, $\alpha_2 = 1$; граничные условия $T_1 = 0{,}03$, $T_1 = 0{,}002$, $P = 0{,}002$.

Результаты расчетов приведены на рисунках 2.21 – 2.23.

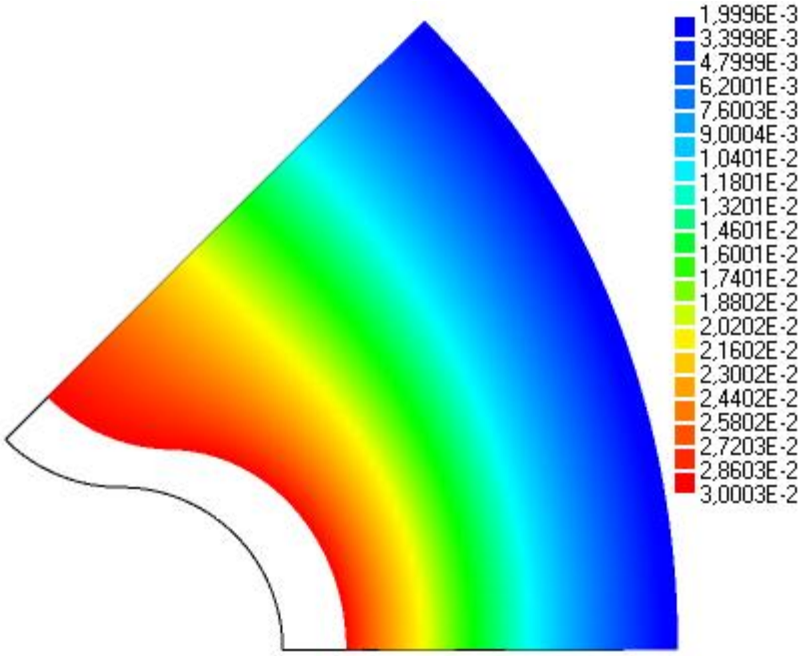


Рис 2.21 Распределение температуры (на деформированном состоянии)

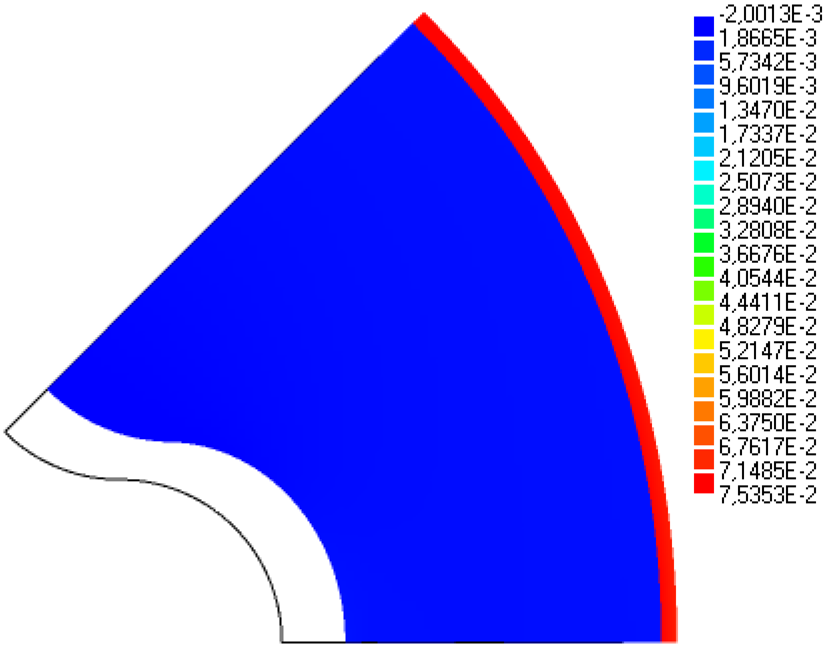


Рис 2.22 Распределение первого главного напряжения (на деформированном состоянии)

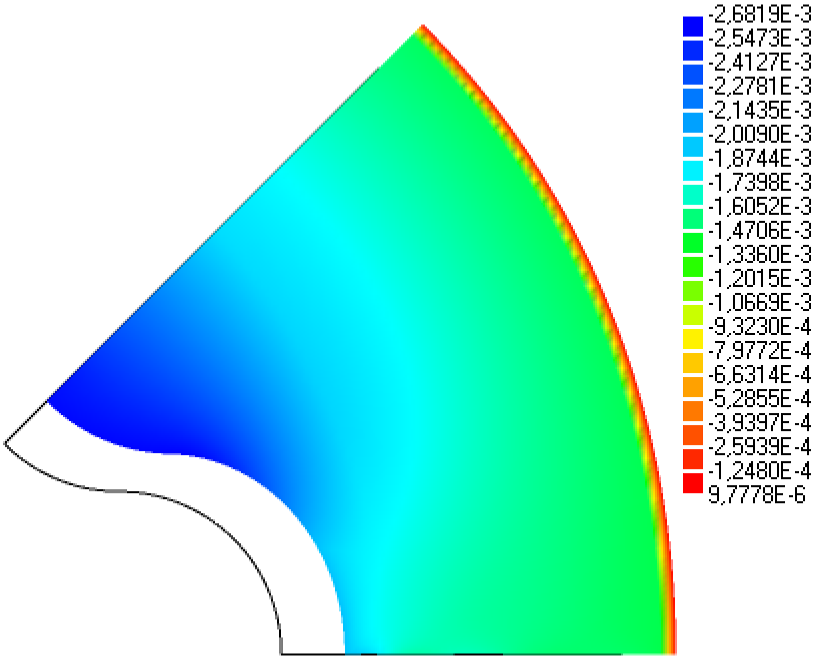


Рис 2.23 Распределение третьего главного напряжения (на деформированном состоянии)

Из результатов расчетов видно, что внутренняя область работает на сжатие, а внешняя оболочка на растяжение, что обусловлено тем, что материал внутренней области практически несжимаем. На границе контакта наблюдаются большие скачки напряжений в силу значительной разницы в значениях модулей Юнга.

При решении данной модельной задачи получена максимальная погрешность удовлетворения граничным условиям не превышающая 0,01%. Такие же результаты могут быть получены и для любых произвольных параметров рассматриваемой задачи. Таким образом, результаты расчетов показывают, что методом ФКО можно получать решения задач термоупругости с большой точностью.

2.4 Решение контактных статических задач линейной теории упругости методом фиктивных канонических областей

2.4.1 Постановка задачи и контактный алгоритм

Ранее были рассмотрены статические задачи теории упругости. При взаимодействии нескольких тел в задачах теории упругости на поверхности задаются условия совместности – равенство векторов перемещений и усилий.

В данной главе рассматриваются контактные задачи. Их основное отличие в том, что в них неизвестны поверхности контакта взаимодействующих тел, и условия контакта на них. Поверхности контакта и контактные условия зависят от условий (а при наличии трения и пути) нагружения. Для решения таких задач применяются итерационные контактные алгоритмы [161], которые состоят в том, что изначально предполагаются некоторые контактные области и условия взаимодействия на них. Решается краевая задача с данными условиями и вычисляется деформированное состояние и полученные усилия на площадках контакта. Эти значения анализируются и в соответствии с парадигмой контактного алгоритма формируются новые поверхности и условия контакта. Итерации продолжаются до тех пор, пока не будут выполнены все условия, предусмотренные алгоритмом. Это могут быть условия статического равновесия, условие незначительного изменения контактных усилий и т.д.

Рассмотрим плоскую контактную задачу. Пусть имеется два тела A и B, которые в процессе деформирования могут вступить в контакт (рис 2.24). Границы тел условно можно разделить на *контактные* и *бесконтактные*, то есть границы, которые потенциально могут вступить в контакт, и границы, которые при данных условиях задачи не могут вступить в контакт.

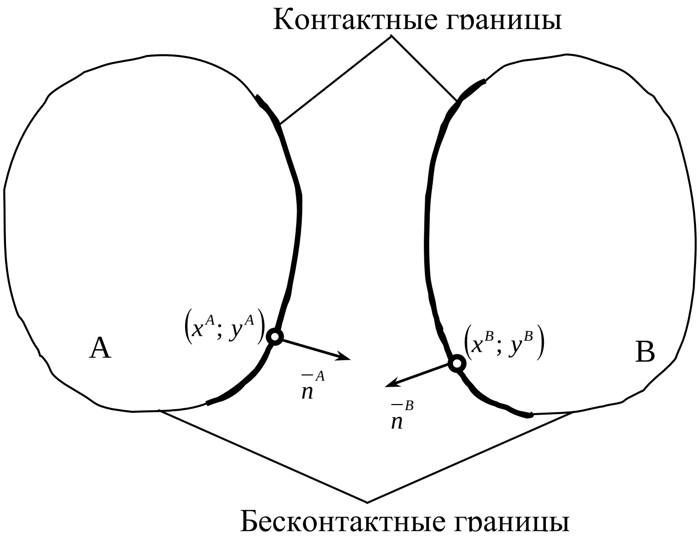


Рис. 2.24 Схема контактного взаимодействия двух тел

Поверхности тел имеют нормали $\bar{n}^A$ и $\bar{n}^B$ соответственно. При взаимодействии тел может возникать трение по закону Кулона с коэффициентом μ. Таким образом, на контактных поверхностях могут иметь место три вида граничных условий [161]:

- Условие отсутствия контакта – на соответствующей части поверхности задано равенство нулю вектора усилий (при отсутствии внешней нагрузки)

$$F_x^A = 0, \quad F_y^A = 0, \quad F_x^B = 0, \quad F_y^B = 0; \tag{2.13}$$

- Условие прилипания – на соответствующей части поверхности заданы совместность перемещений и условия статического равновесия
$$U_x^A - U_x^B = \Delta U_x, \quad U_y^A - U_y^B = \Delta U_y \quad F_x^A = -F_x^B, \quad F_y^A = -F_y^B; \tag{2.14}$$
где $\Delta U_x = x^B - x^A$ и $\Delta U_y = y^B - y^A$ – разность координат в недеформированном состоянии точек поверхностей, вступающих в контакт. Фактически, условие прилипания соответствует условиям совместности для задач теории упругости.
- Условие проскальзывания. На поверхностях проскальзывания также должно быть выполнено условие статического равновесия
$$F_x^A = -F_x^B, \quad F_y^A = -F_y^B; \tag{2.15}$$
Кроме того, необходимо задать соотношения между нормальными и касательными усилиями, соответствующие закону трения Кулона, и условия совместности нормальных перемещений тел
$$F_\tau^A = \pm \mu F_n^A, \quad U_n^A - U_n^B = \Delta U_n \tag{2.16}$$
где F_n^A и F_τ^A – нормальное и касательное усилия на границе тела A соответственно, U_n^A и U_n^B – нормальные перемещения тел A и B соответственно. Поскольку границы тел A и B имеют разные нормали, необходимо выбрать некоторое общее направление n. Можно, например, проецировать на нормаль тела A; можно на некоторое среднее направление $\bar{n} = \bar{n}^A - \bar{n}^B$. Наиболее правильным является проецирование граничных условий на нормаль к поверхности в текущем деформированном состоянии. Знак при F_n^A выбирается из условия того, что касательное усилие направлено против взаимного смещения тел.

После решения задачи с текущими граничными условиями необходимо изменить их в соответствии с полученными перемещениями и усилиями. Условия перехода следующие: если в некоторой точке текущее условие – отсутствие контакта, то при пересечении тел в деформированном состоянии условие необходимо изменить либо на прилипание, либо на проскальзывание. Если задано прилипание, то условие может быть изменено на отсутствие контакта, если нормальное усилие на поверхности больше нуля (растягивающее), либо на проскальзывание, если $|F_\tau^A| > |\mu F_n^A|$. Соответственно, условие проскальзывание также может быть изменено на отсутствие контакта в случае положительного нормального усилия, или на прилипание, если $|F_\tau^A| < |\mu F_n^A|$.

Остановимся на моменте определения координат точек на поверхностях, вступающих в контакт. На поверхности одного из тел, например тела A, выбираются узлы для формирования системы разрешающих уравнений. Если в текущем деформированном состоянии узел тела A проникает в тело B, то из данного узла опускается нормаль на поверхность B – точка пересечения может быть использована как контактная для данного узла. При удовлетворении условий прилипания контактные узлы должны иметь одинаковые координаты в деформированном состоянии, однако из-за погрешности они могут меняться. При удовлетворении условий проскальзывания контактные узлы должны смещаться друг относительно друга в касательном направлении, поэтому координаты должны обновляться на каждой итерации. К тому же в нормальном направлении условия совместности перемещений не удовлетворяются точно не только из-за погрешности решения, но и из-за неточного определения нормального (и касательного) направления и скольжения. Таким образом, точки тела A будут иметь проникновение в тело B, либо будут лежать вне его. То есть на каждой итерации необходима коррекция значения ΔU_n с учетом текущего деформированного состояния.

На основе вышесказанного предлагается следующий простейший контактный алгоритм для решения задач методом ФКО, включая только отыскание коэффициентов, остальные этапы решения (выбор ФКО, ограничение числа слагаемых и т.д.) остаются прежними:

1. Формирование контактных и бесконтактных поверхностей – то есть разделение поверхностей тел на части, которые теоретически (по предположению исследователя) могут войти в контакт, и которые не могу при данных граничных условиях.
2. Формирование *бесконтактных матрицы и вектора* разрешающей системы уравнений, то есть отвечающих за граничные условия на всех частях поверхностей, исключая контактные.
3. Задание начальных граничных условий на контактных поверхностях, исходя из анализа недеформированного состояния. Если тела изначально пересекаются, на соответствующей части поверхностей задается условие прилипания или проскальзывания, на остальной части контактных поверхностей – отсутствие контакта. Также условия начального контакта (прилипания или проскальзывания) могут быть заданы исследователем “принудительно”, для исключения перемещения тел как абсолютно жестких, если отсутствуют условия закрепления.
4. Подготовка к текущей контактной итерации, которая заключается в вычислении значений базисных функций в контактных узлах, необходимых для расчета *контактных матрицы и вектора*.
5. Формирование *контактных матрицы и вектора* разрешающей системы уравнений, то есть отвечающих за текущие граничные условия на всех контактных поверхностях.
6. Вычисление полной системы разрешающих уравнений путем суммирования контактных и бесконтактных матриц и векторов.
7. Решение системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов.
8. Вычисление текущих перемещений и усилий на контактных поверхностях. Изменение контактных условий в соответствии с вычисленными величинами по изложенным выше уравнениям, изменение точек контакта, направлений нормалей и величин ΔU_x, ΔU_y и ΔU_n.
9. Анализ контактных условий на предыдущей и текущей итерациях. Если эти изменения укладываются в заданную точность, то окончание расчета, иначе – переход к пункту четыре.

Важной особенностью алгоритма является то, что на каждой итерации необходимо обновлять только контактную часть разрешающей системы, а для метода ФКО основное время решения задачи уходит именно на формирование матрицы и вектора системы. Более того, значения базисных функций (пункт четыре) можно не вычислять непосредственно на каждой итерации (эти функции являются достаточно сложными и требуют много машинного времени). Функции могут быть вычислены только один раз в точках контакта в недеформированном состоянии. Хотя на каждой итерации координаты точек контакта на поверхности B меняются, координатные функции в них могут быть вычислены интерполированием через функции в начальных контактных узлах (используя функции формы граничных элементов).

Для вычисления интегралов по контактным поверхностям в программе REGIONS применяется алгоритм адаптивной дискретизации на каждой итерации. Для этого вычисляется деформированное состояние, и граничные элементы одной поверхности проецируются на другую. После этого граница второй поверхности редискретизируется.

Таким образом, если контактная поверхность гораздо меньше бесконтактной, то на формирование контактной матрицы, а соответственно на каждую итерацию, затраты времени будут гораздо меньше, чем на вычисление бесконтактной матрицы. Для размеров (количества узлов) контактной поверхности, на порядок меньшей, чем бесконтактной при десяти итерациях можно ожидать, что полное время решения задачи составит лишь в два раза больше, чем время решения аналогичной упругой задачи без контактного взаимодействия.

2.4.2 Задача о замковом соединении лопатки и диска

Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии лопатки и диска турбины. На рисунке 2.25 изображено замковое соединение с одним “зубом”, которое состоит из части диска и хвостовика лопатки. Действие отброшенной части лопатки заменяется действием равномерно распределенной нагрузки F. На поверхностях возможного взаимодействия хвостовика и диска задана контактная пара.

Все величины для рассматриваемой задачи приняты безразмерными. Свойства материалов лопатки и диска одинаковы: модуль упругости $E = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Величина распределенной нагрузки $F = 0{,}01$. На рисунках 2.26-2.29 приведены результаты расчетов – компоненты напряжений и интенсивность напряжений. На рисунках хорошо видны места концентрации напряжений в скруглениях хвостовика и лопатки, что является характерным для данного вида замкового соединения и согласуется качественно с результатами расчетов другими методами.

Данная задача иллюстрирует возможность применения предложенного контактного алгоритма для решения методом ФКО контактных задач с достаточно сложной геометрией взаимодействующих тел и контактных границ.

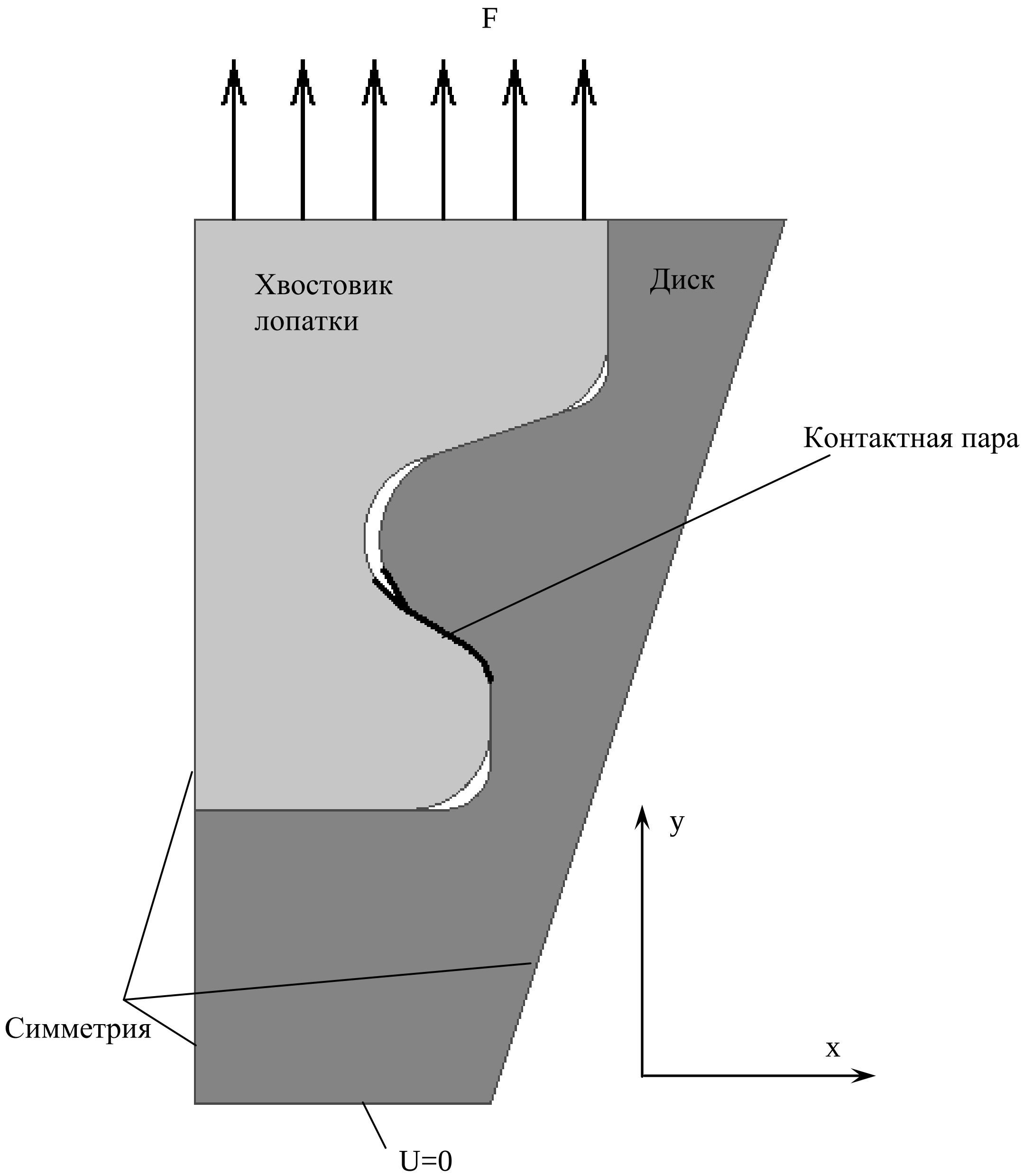


Рис. 2.25 Расчетная схема задачи о замковом соединении лопатки и диска

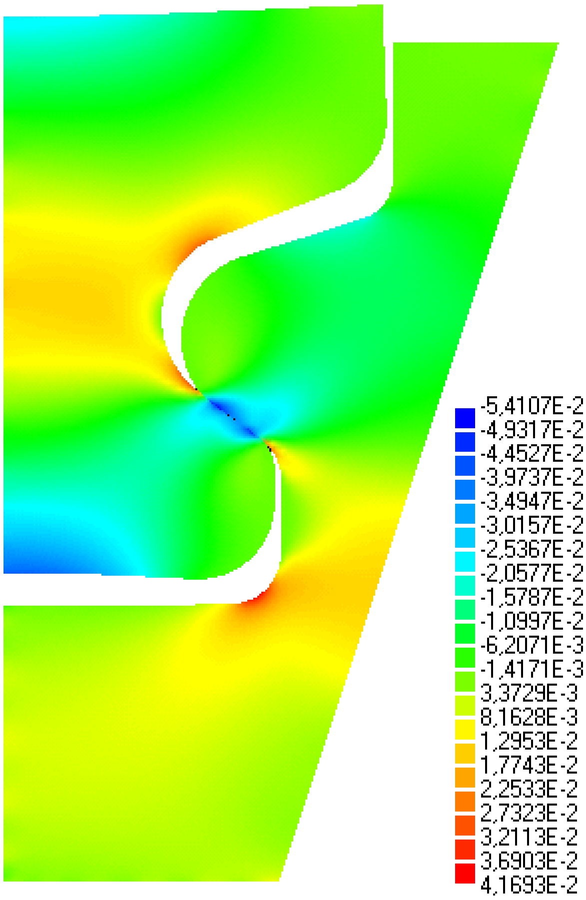


Рис. 2.26 Напряжение σ_x

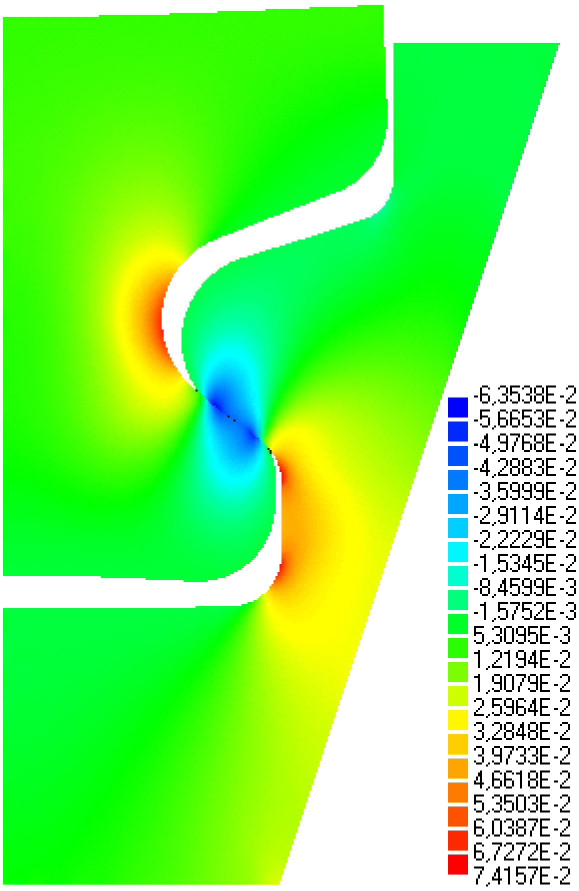


Рис. 2.27 Напряжение σ_y

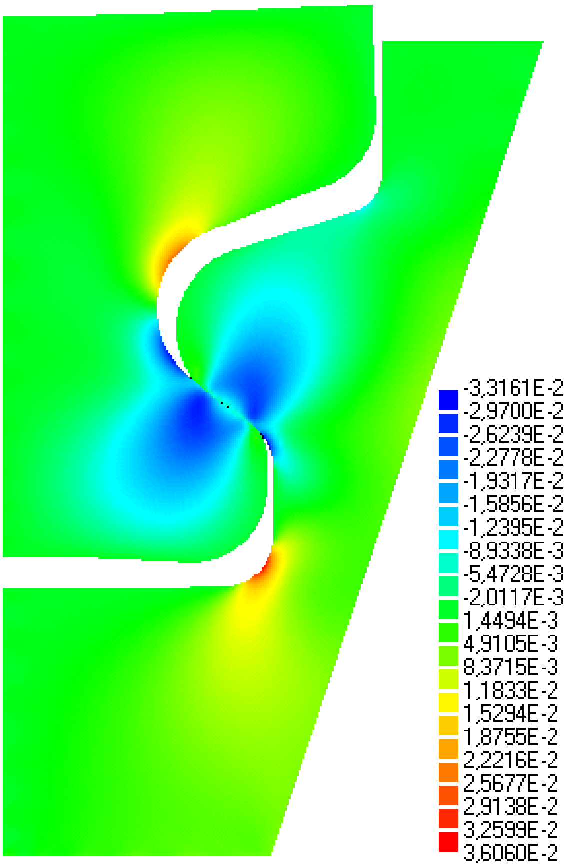


Рис. 2.28 Напряжение σ_{xy}

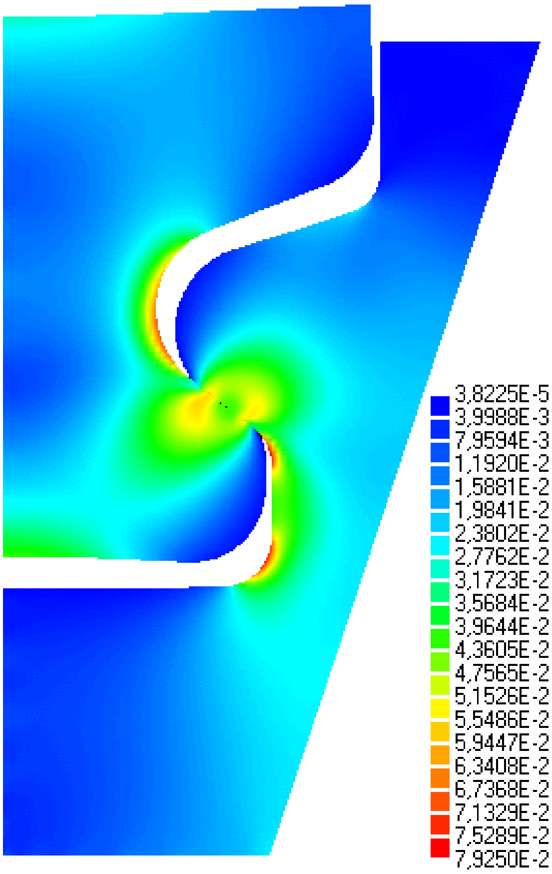


Рис. 2.29 Интенсивность напряжений σ_i

3 Применение метода фиктивных канонических областей

3.1 Программа REGIONS

Для практического применения автором разработана программа REGIONS, реализующая метод ФКО для решения плоских и осесимметричных задач теплопроводности, упругости и термоупругости. Как программу, REGIONS можно отнести к классу “легких” CAE систем. Основная часть программы – расчетные алгоритмы и интерфейс написаны на языке Delphi в системе визуального программирования Delphi 2006. Программа использует несколько динамически загружаемых библиотек (DLL – Dynamic Link Libraries), написанных автором на языке Fortran и реализующих вычисление специальных функций (функций Бесселя) и процедуры решения СЛАУ (импортированы из математической библиотеки IMSL) [5]. Система имеет современный интерфейс, включающий набор “окон” с меню, панелями инструментов, “всплывающие” меню и т.д. Для визуализации графических построений, вывода результатов используется библиотека OpenGL – стандартная библиотека для всех 32-х разрядных операционных систем [71], использующая графический акселератор, а также стандартные графические инструменты GDI (Graphics Device Interface), предоставляемые компонентами Delphi. Поскольку язык Delphi – объектно-ориентированный язык (то есть основными единицами программы являются объекты), автор придерживался этой идеологии при реализации алгоритмов. Так все графические объекты и ФКО представлены действительно как объекты Delphi с наследованием свойств, инкапсуляцией, полиморфным поведением и т.д. [75].

Ниже перечислены основные возможности программы REGIONS.

1. Системные возможности – включают в себя собственно интерфейс и настройку текущих параметров программы. REGIONS относится к SDI приложениям (Single Document Interface – одно документное приложение), то есть позволяет держать в оперативной памяти только одну задачу (набор данных). К настраиваемым параметрам относятся в основном параметры графической визуализации (вывод нумерации объектов, вид построения объектов, масштабирование и т.д.). В любой момент текущая задача может быть сохранена в файле частично или полностью или загружена из ранее сохраненного файла. Параметры интерфейса и системы сохраняются при завершении работы с программой и восстанавливаются при ее следующей загрузке (хотя данная опция также может быть отключена).

2. Программа поддерживает девять типов анализа: плоская стационарная задача теплопроводности, плоская статическая задача теории упругости и термоупругости (плосконапряженное и плоскодеформированное состояния), осесимметричная стационарная задача теплопроводности, осесимметричная статическая задача упругости и термоупругости, плоская нестационарная задача теплопроводности. Для всех типов анализа существует несколько базовых типов ФКО. На их основе пользователь может создавать собственные типы ФКО, сохранять их в файлах библиотек и считывать из них. В любой момент пользователь может изменить тип анализа, при этом автоматически происходят необходимые изменения данных: граничные условия, некорректные для нового типа анализа заменяются на подходящие; удаляются ФКО не поддерживающие данный тип анализа; если предыдущая задача может служить вспомогательной для новой (как начальное условие для нестационарного анализа или для получения частного решения), то ее решение сохраняется и может быть восстановлено при обратном переходе.

3. Частью программы является разработанный автором транслятор формул, который позволяет задавать переменные и вычислять символьные выражения

практически любой сложности. Это дает возможность вводить почти все значения с клавиатуры в виде символьных формул.

4. Графический редактор программы работает с двумерными объектами: точками, линиями, областями. Точки могут быть использованы как вспомогательные объекты для построения линий. Существует четыре типа линий – отрезок прямой, дуга окружности, дуга эллипса и сплайн (полином любого порядка). Линии служат для задания границ областей. При работе с графическими объектами программа позволяет эффективно использовать “мышь”, что делает процесс построения геометрической модели привычным для пользователей современных CAD/CAE/CAM (Computer Aided Design/Engineering/Manufacturing) систем (систем автоматизированного проектирования/расчета/производства). Геометрическая модель может содержать любое число геометрических объектов.

5. На границах областей могут быть заданы любые граничные условия (корректные для данной задачи) приведенные ранее. Транслятор формул позволяет задавать граничные условия в виде произвольной функции вдоль любой линии границы области. В качестве начальных условий для нестационарного анализа может быть использовано уже полученное решение стационарной или нестационарной задачи.

6. Для формирования системы разрешающих уравнений в программе реализован метод наименьших квадратов как самый универсальный и гибкий. Интегралы для формирования СЛАУ [43] вычисляются методом прямоугольников, для чего граница области разбивается на отрезки, а сама область на конечные элементы. Разбиение границы происходит автоматически, сразу после создания линии. Естественно, количество элементов может быть изменено пользователем в любой момент. Можно проводить дискретизацию границ, как с постоянным шагом, так и с коэффициентом сгущения.

7. Каждая расчетная область может быть погружена в любое число ФКО с любым числом слагаемых. Так же могут быть заданы так называемые фиктивные граничные области (ФГО), реализующие метод источников. Любое слагаемое может быть исключено из решения.

8. Этап отыскания неизвестных коэффициентов (формирование разрешающей системы и ее решение) может выполняться сразу или по частям. Для стационарных задач пользователь может вычислить коэффициенты матрицы и хранить их в памяти или в файле и в любой момент решить систему уравнений. Для нестационарных задач можно вычислять матрицу и вектор системы на любом шаге по времени, хранить все значения и интегрировать для формирования конечной СЛАУ. Все матрицы хранятся в треугольном виде, что позволяет экономить ресурсы компьютера. Для решения СЛАУ программа предлагает семь различных процедур: три реализованы автором на языке Delphi – метод исключения Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод Гаусса с итерационным уточнением корней; четыре импортированы из математической библиотеки IMSL в виде DLL – метод Гаусса для матриц общего вида с итерационным уточнением и без него, процедуры решения для симметричных матриц с уточнением корней и без уточнения.

9. После отыскания коэффициентов пользователь может вычислить невязки краевых условий: максимальные и среднеинтегральные.

10. Реализованы алгоритмы оптимизации решений.

11. Искомые (температура, градиент температуры, перемещения и напряжения) и вспомогательные функции (производная температуры по времени, главные напряжения, интенсивность напряжений) могут быть вычислены в любой точке в любой момент времени. Можно строить графики и изолинии для любой расчетной функции. Для построения изолиний используется конечноэлементная сетка. Для нестационарных задач можно создать анимацию графиков и изолиний, в том числе с изменяющимися границами.

12. Как и многие популярные CAD/CAE/CAM системы REGIONS имеет встроенный язык программирования, который относится к языкам сверхвысокого уровня интерпретационного типа. Язык разработан автором, его основа – вышеупомянутый транслятор формул. Он включает в себя все основные управляющие конструкции – присваивания, условную, множественного выбора, цикла, прерывания цикла, выхода и т.д. Все конструкции языка позволяют любую степень вложенности. Введена возможность работы с массивами и матрицами. Процедуры и функции языка позволяют делать практически все действия, доступные в графическом интерфейсе и естественно делают программу более универсальной. Например, позволяют создавать параметрическую модель, что удобно для решения нестационарных задач с подвижными границами.

13. В программу встроены реализованные автором вспомогательные инструменты математического анализа: решение нелинейных уравнений с одной переменной, численное интегрирование, интерполяция и аппроксимация, решение обыкновенных дифференциальных уравнений, решение СЛАУ, обращение матриц. Эти инструменты позволяют в ходе решения проводить промежуточные вычисления или дополнительную обработку полученных результатов, не прибегая при этом к другим программам.

Для верификации алгоритмов программа REGIONS была протестирована несколькими способами. Один из тестов был направлен на выявление неправильно запрограммированных базисных функций ФКО т.к. по опыту автора, наиболее важным для программ, реализующих метод ФКО является именно правильная их реализация, ведь в противном случае не выполняется дифференциальное уравнение задачи. В силу достаточной сложности этих функций более вероятно сделать ошибку в коде при их программировании. Один из методов тестирования основан на том, что некоторые простые задачи можно решить с одинаковой точностью, используя разные ФКО (базисные функции). Сравнивая эти решения, можно найти неправильно запрограммированные функции. Еще один из способов тестирования – сравнение с решениями, полученными другими методами. Поскольку доступными в настоящее время являются программы, реализующие численные методы, сравнение проводилось именно с ними. Заметим, что здесь речь не идет о проверке точности метода ФКО, а лишь о проверке правильности работы программы REGIONS. При тестировании удалось обнаружить и устранить несколько ошибок.

Программа REGIONS зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ РФ (свидетельство № 2006611607). Копия сертификата прилагается.

Программа REGIONS в настоящее время используется при выполнении плановых научных работ, а также в учебном процессе Пермского Государственного Технического Университета и Пермского Государственного Университета. Акты использования программы REGIONS прилагаются.

3.1.1 Сравнение программы REGIONS с программой, реализующей численный метод

В данном разделе приведены решения некоторых задач в программе REGIONS и решения, полученные другим методом в профессиональной CAE программе. Проводится сравнительный анализ эффективности применения программы REGIONS и метода ФКО и численного метода при решении различных задач. В качестве метода для сравнения выбран МКЭ, как наиболее распространенный для решения класса задач, реализованных в REGIONS. В качестве программы, реализующей МКЭ, выбрана распространенная в России программа ANSYS. Отметим, что, несомненно, программа ANSYS является гораздо более мощным инструментом математического моделирования, чем REGIONS. В ней реализованы алгоритмы решения трехмерных и нелинейных задач. Сравнение проводилось только в классах задач, реализованных в REGIONS – линейных, плоских и осесимметричных задач теплопроводности и теории упругости.

В качестве первой задачи рассмотрим одну из задач, имеющих точное аналитическое решение, а именно – задачу Ляме для полого цилиндра: рассматривается полый цилиндр под равномерным внутренним давлением. В силу простоты и известности данной задачи [83] расчетная схема не приводится. Задача решается для следующих значений (в безразмерном виде): внешний радиус $R_1 = 1$, внутренний радиус $R_2 = 0{,}5$, давление $P = 1$, модуль упругости $E = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Рассматривается случай плоской деформации.

При решении данной задачи методом ФКО в программе REGIONS получено точное аналитическое решение задачи (здесь, конечно, речь идет о машинной точности). Выбор расположения ФКО и необходимых базисных функций осуществлялся с помощью заложенных в программе алгоритмов оптимизации. В результате в решении остались только два слагаемых.

В программе ANSYS данная задача решалась для различного числа конечных элементов (и, соответственно, степеней свободы). Результаты приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Результаты решения задачи Ляме.

Программа REGIONS, метод ФКО			
Число слагаемых	Время решения, сек	Max интенсивность напряжений	Погрешность, %
2	10	2,313246876	0,00
Программа ANSYS, метод КЭ			
Число степеней свободы	Время решения, сек	Max интенсивность напряжений	Погрешность, %
272	1	2,4860	7,47
1284	1	2,2923	0,90
3160	2	2,3104	0,12
5872	7	2,3112	0,09
9568	18	2,3108	0,11

Сравнение результатов показывает, что для такой простой задачи метод ФКО является более эффективным как по времени решения, так и по точности. Отметим, что основное время программе REGIONS потребовалось на выполнение оптимизации решения, для “выделения” точного решения из множества возможных приближенных решений. Решение задачи с двумя слагаемыми как таковой требует гораздо меньше времени.

Рассмотрим теперь более сложную задачу – задачу о распределении температуры в поперечном сечении твердотопливного ракетного двигателя. Постановка задачи и решение в программе REGIONS дано ранее в 2.1.1.1. В данном разделе проводится сравнение с решением в программе ANSYS.

При решении задачи методом ФКО было получено решение, максимальная невязка граничных условий которого (а для данной задачи это значит и максимальная погрешность) составила менее 0,005 %. При этом потребовалось удержать в решении всего 150 слагаемых.

В программе ANSYS проводилась серия расчетов для различного числа конечных элементов. Сравнение точности решения с решением, полученным методом ФКО, проводилось по вычисленным значениям максимального и минимального градиента температуры. Результаты приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Результаты решения задачи о распределении температуры.

Программа REGIONS, метод ФКО				
Число слагаемых	Время решения, сек	Max градиент	Min градиент	Погрешность, %
150	2	2349,6	508,5	0,005
Программа ANSYS, метод КЭ				
Число степеней свободы	Время решения, сек	Max градиент	Min градиент	Погрешность, %
226	1	2296,7	506,4	2,250
836	1	2333,0	506,4	0,708
3028	1	2345,2	507,8	0,188
6850	2	2347,8	508,1	0,078
32468	8	2349,6	508,4	0,020

Сравнительный анализ результатов показывает, что в данной задаче для достижения высокой точности решения методом ФКО требуется найти гораздо меньшее число неизвестных, чем в методе конечных элементов. Время расчета программой REGIONS так же меньше, чем при использовании программы ANSYS. Здесь следует отметить, что время решения включало как построение модели, так и отыскание неизвестных. Решение выполнялось с помощью командных файлов для обеих программ. При большом числе узлов, основное время программе ANSYS требовалось для построения (автоматического) конечноэлементной сетки. Таким образом, отсутствие необходимости дискретизации всей области оказалось значительным преимуществом метода ФКО в отношении времени решения. Отметим, так же, что если бы не было получено решение задачи методом ФКО, оценить значение погрешности отдельного конечноэлементного расчета было бы затруднительно. Для оценки погрешности необходимо было бы, например, построить кривые сходимости для различных сеток, то есть для получения оценки погрешности одного расчета, необходимо было бы провести несколько.

Выполним сравнение программ REGIONS и ANSYS по решению задачи о концентраторе напряжений. Расчетная схема следующая – прямоугольная пластина с вырезом растягивается равномерной нагрузкой (рис 3.1). Задача решается для следующих значений (в безразмерном виде): высота $H = 0{,}4$; радиус концентратора $R = 0{,}05$; давление $P = 0{,}1$; модуль упругости $E = 1$; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$. Рассматривается случай плосконапряженного состояния. Результаты приведены в таблице 3.3.

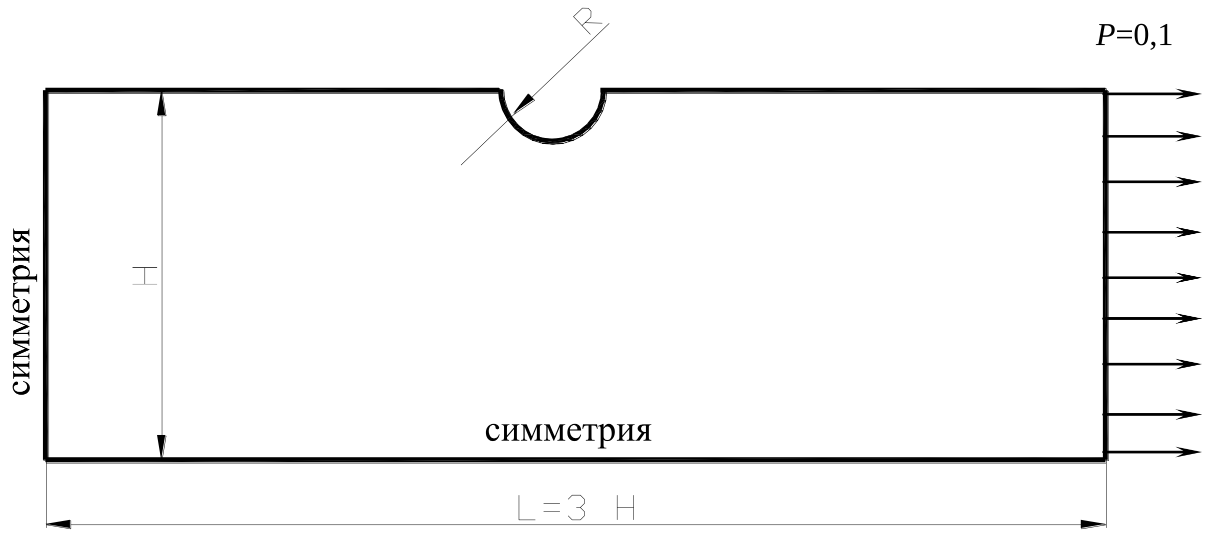


Рис. 3.1. Расчетная схема задачи о концентраторе напряжений

Таблица 3.3. Результаты решения задачи о концентраторе напряжений.

Программа REGIONS, метод ФКО			
Число слагаемых	Время решения, сек	Коэффициент концентрации	Погрешность, %
600	20	3,0514	0,02
Программа ANSYS, метод КЭ			
Число степеней свободы	Время решения, сек	Коэффициент концентрации	Погрешность, %
936	1	2,8859	5,42
8350	2	3,0802	0,94
23876	6	3,0481	0,11
46172	13	3,0264	0,82
69616	30	3,0179	1,10
100568	61	3,0367	0,48
139798	119	3,0424	0,30

Из приведенных результатов можно сделать следующие выводы: с помощью метода ФКО получено более точное решение, чем с помощью МКЭ, время решения при этом так же меньше.

Таким образом, все приведенные результаты позволяют сделать вывод, что при одинаковой точности, метод ФКО требует меньше времени для решения задачи. При этом, метод ФКО позволяет достичь очень высокой точности, которую не удается получить с помощью МКЭ.

3.2 Применение внутреннего языка программирования программы REGIONS для исследования НДС плашки

Программа REGIONS имеет внутренний язык программирования, что делает ее более универсальной и позволяет автоматизировать процесс решения некоторых задач. Этот язык программирования ориентирован в основном на создание графических моделей или полной постановки граничной задачи и эффективен при решении задач, в которых необходимо провести исследование для геометрически подобных областей, но отличающихся некоторыми параметрами геометрии. Рассмотрим следующую задачу: на рисунке 3.2 изображено сечение плашки для вытяжки проволоки. Внешний диаметр равен 13 мм, ширина внутреннего отверстия 1,6 мм. Радиус скругления внутреннего отверстия r может варьироваться от 0 до 0,8 мм.

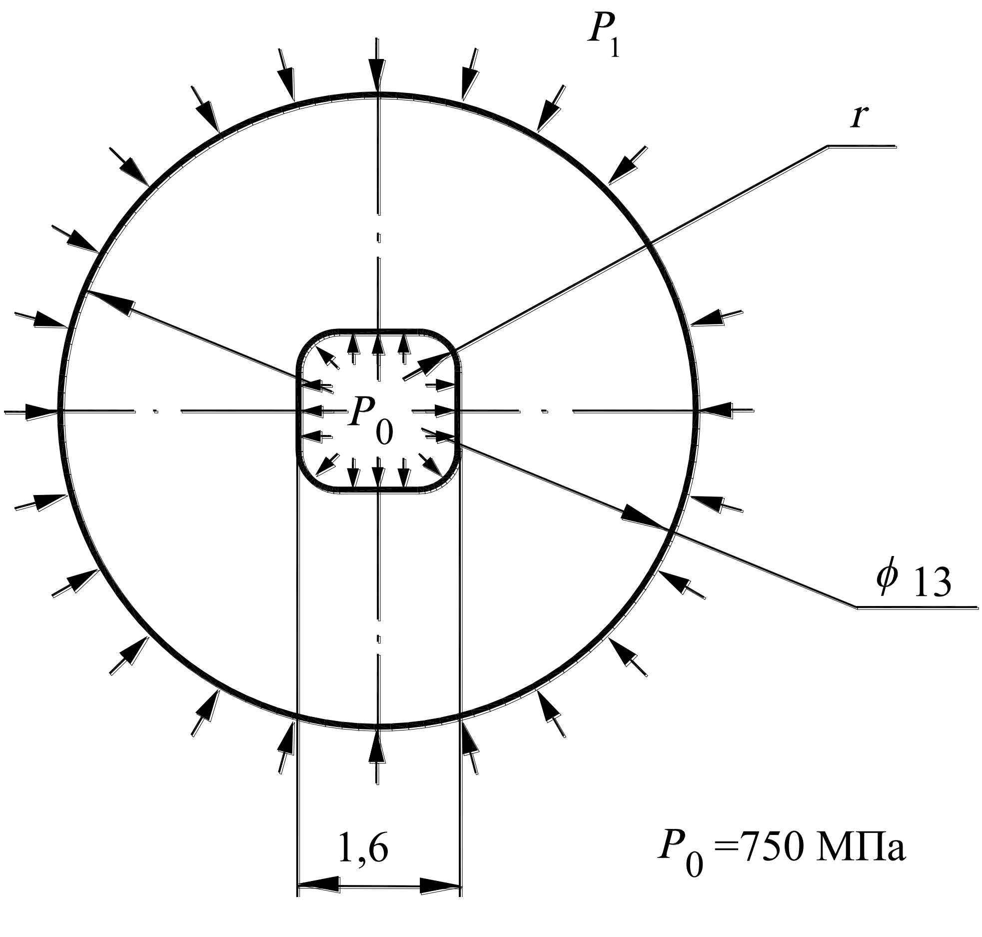


Рис. 3.2 Поперечное сечение плашки

При вытяжке материал проволоки переходит в пластическое состояние, это означает, что на поверхность внутреннего отверстия действует постоянное давление, равное пределу текучести материала проволоки P_0=750 МПа.

Материал плашки хуже работает на растяжение. В местах скругления создается концентрация напряжений, и максимальное главное растягивающее напряжение может превышать предел прочности плашки на растяжение. Для уменьшения максимального растягивающего напряжения на внешней поверхности прикладывается давление P_1, оно создает в местах концентрации сжимающее напряжение, которое частично компенсирует растягивающее напряжение от внутреннего давления. Необходимо рассчитать величину компенсирующего давления P_1 в зависимости от радиуса скругления, чтобы максимальное главное растягивающее напряжение не превышало предела прочности на растяжение материала плашки. Для этого необходимо решить множество краевых задач для подобных областей, отличающихся радиусом скругления и величиной внешнего давления. Здесь можно эффективно использовать внутренний язык программирования REGIONS. Достаточно написать программу, в которой задаются исходные данные (параметры геометрии и величины нагрузок) и выполняется постановка и решение задачи. Такая программа была составлена, и по результатам решения множества задач построена номограмма зависимости максимального главного растягивающего напряжения от радиуса скругления и внешнего давления (рис. 3.3).

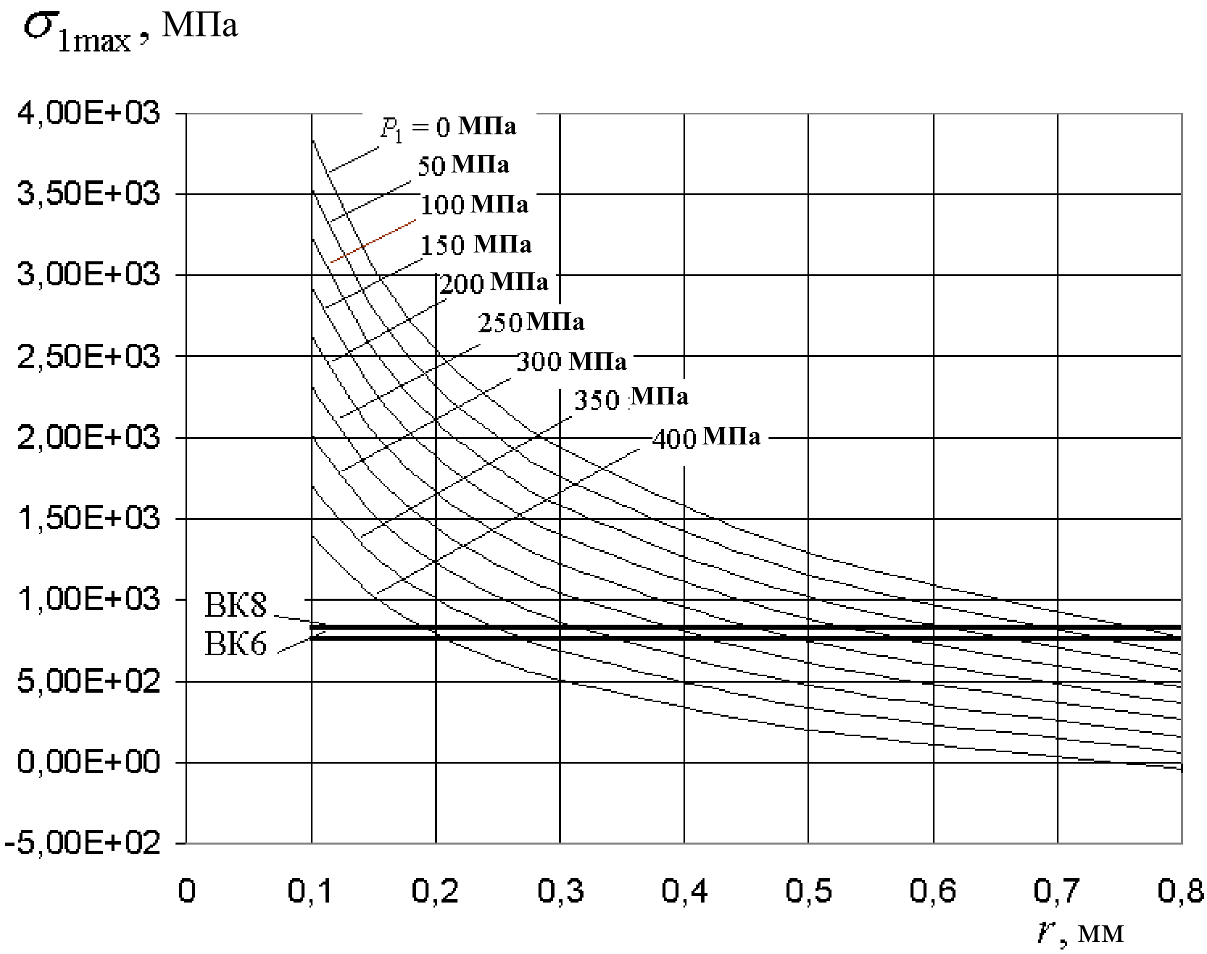


Рис. 3.3 Номограмма зависимости максимального главного растягивающего напряжения от радиуса скругления и внешнего давления.

По ней можно определить необходимое внешнее давление в зависимости от радиуса скругления для любого материала. Для примера на номограмме показаны пределы прочности на растяжение материалов ВК6 и ВК8. На рисунке 3.4 приведен результат расчета главного растягивающего напряжения для r=0,5 мм, P_1=200 МПа.

Полученная номограмма была использована кафедрой Динамики и прочности машин Пермского Государственного Технического Университета при выполнении плановых научных и хоздоговорных работ. Акт внедрения прилагается.

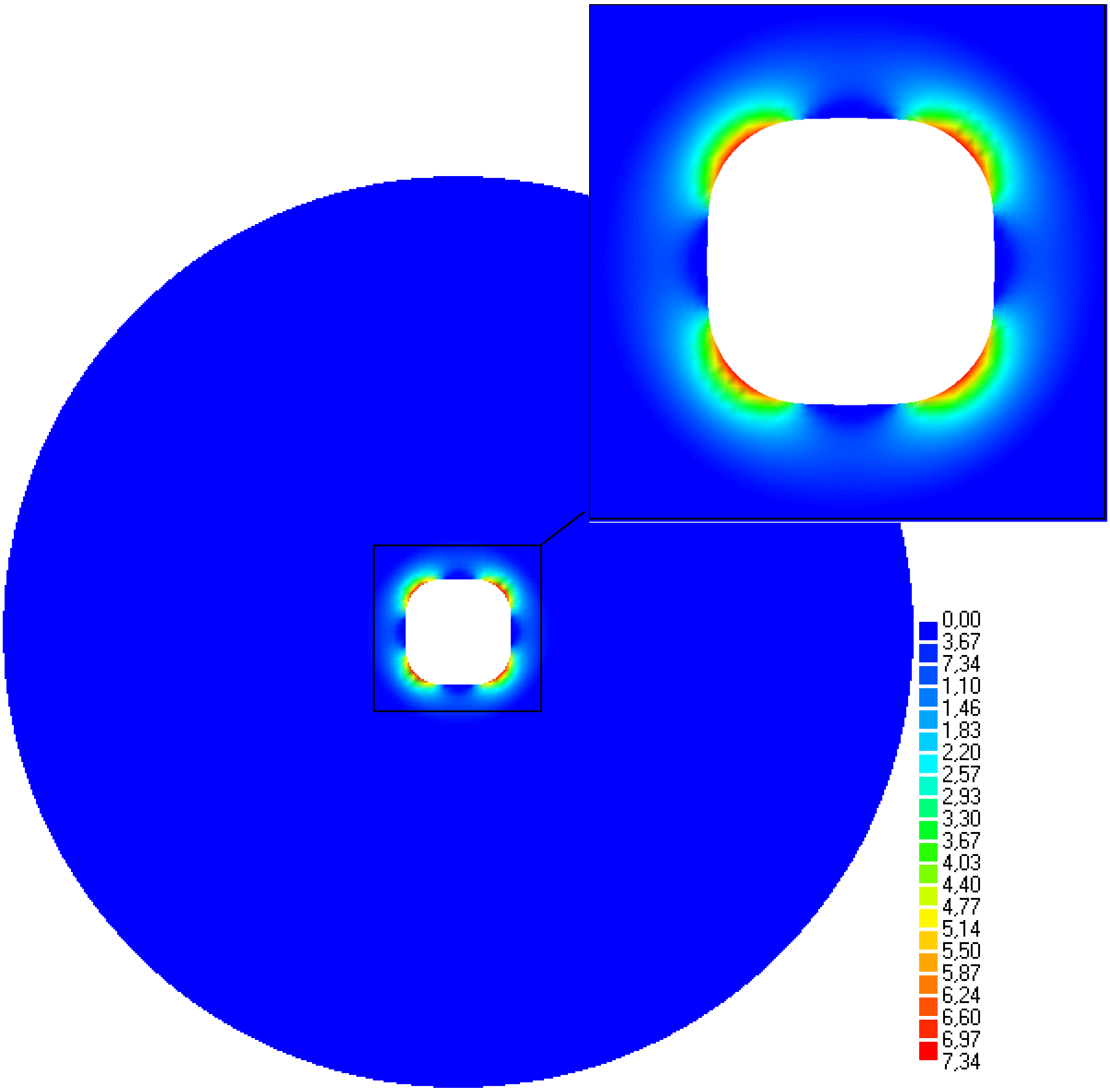


Рис. 3.4 Главное растягивающее напряжение в сечении плашки (Па 10^8).

3.3 Задача определения рациональной формы отверстия

При проектировании газотурбинного двигателя возникла следующая проблема: в отверстиях для подвода охлаждающего воздуха в ободе промежуточного диска турбины высокого давления по трехмерным конечноэлементным расчетам получились недопустимо высокие напряжения. Это связано с круглой формой отверстий, что приводит к высокому коэффициенту концентрации напряжений ~ 3,1. Было предложено сделать отверстия овальными, для необходимого снижения коэффициента концентрации до 2,5. Однако, при этом необходимо сохранить площадь отверстий для сохранения расхода воздуха. Подобрать форму отверстия по объемным расчетам было бы слишком трудоемким. Для этого можно воспользоваться решением задачи в двумерной постановке.

Обод диска может быть рассмотрен как цилиндрическая оболочка, которая работает на растяжение от действия центробежных сил. Поскольку отверстия достаточно малы по сравнению с размерами диска, можно рассмотреть растяжение бесконечной пластины с отверстием (рис 3.5). О близости этих задач говорит и тот факт, что для круглого отверстия теоретический коэффициент концентрации равен 3,0 [115], то есть, близок к полученному по объемным конечноэлементным расчетам.

Для определения геометрических параметров овального отверстия с необходимым коэффициентом концентрации проведен ряд расчетов в программе REGIONS. Овальное отверстие характеризуется горизонтальной площадкой L (рис 3.6). При сохранении площади круглого отверстия, необходимо найти отношение $K = L / R$, чтобы получить концентрацию по напряжению σ_x равную 2,5. Если радиус исходного круглого отверстия R_1, то его площадь равна $S_1 = \pi R_1^2$, а площадь овального $S = (\pi + 2K) R^2$, и из их равенства получаем $R = R_1 \sqrt{\dfrac{\pi}{\pi + 2K}}$. Используя данную зависимость, был написан командный файл для программы REGIONS, который в цикле задает геометрию и граничные условия, решает задачу и определяет коэффициент концентрации. Был проведен ряд расчетов для $K = 0{,}01...0{,}85$. При этом все величины безразмерные: модуль Юнга $E = 1$, коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$, сила $F = 1$. Задача решается не для бесконечной области, а для квадратной пластины, размеры которой во много раз больше радиуса отверстия.

На рисунке 3.7 приведен график зависимости коэффициента концентрации от коэффициента K. По расчетам определено, что для получения требуемой концентрации напряжений достаточно небольшой горизонтальной площадки L, при этом $K = 0{,}14$. Из графика можно также сделать вывод, что при дальнейшем увеличении $K > 0{,}85$, коэффициент концентрации будет уменьшаться незначительно. На рис. 3.8 приведено распределение напряжения σ_x, полученное программой REGIONS.

Результаты решения данной задачи были использованы при выполнении расчетных работ в отделе динамики и прочности ОАО "Авиадвигатель", акт использования прилагается.

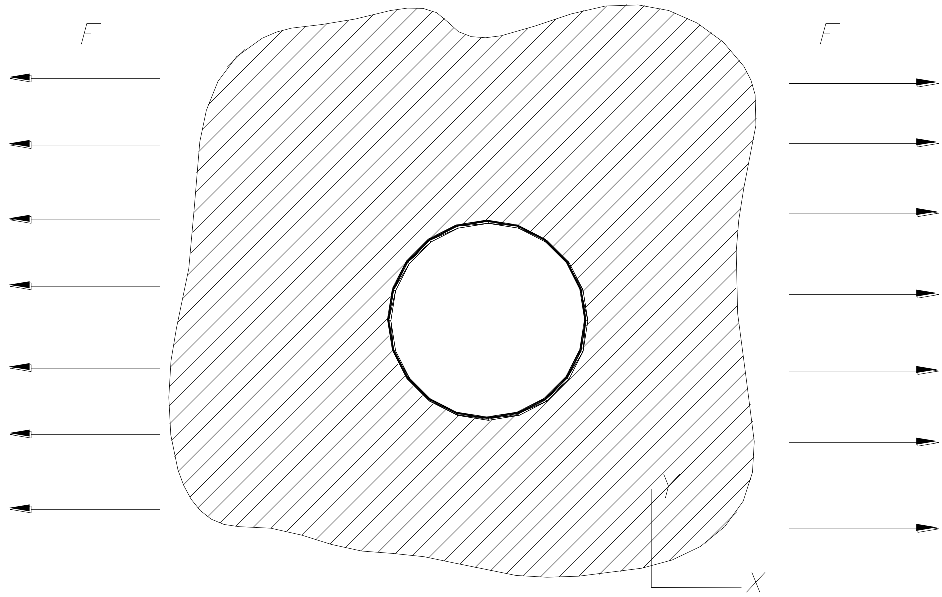


Рис 3.5 Расчетная схема задачи с круглым отверстием

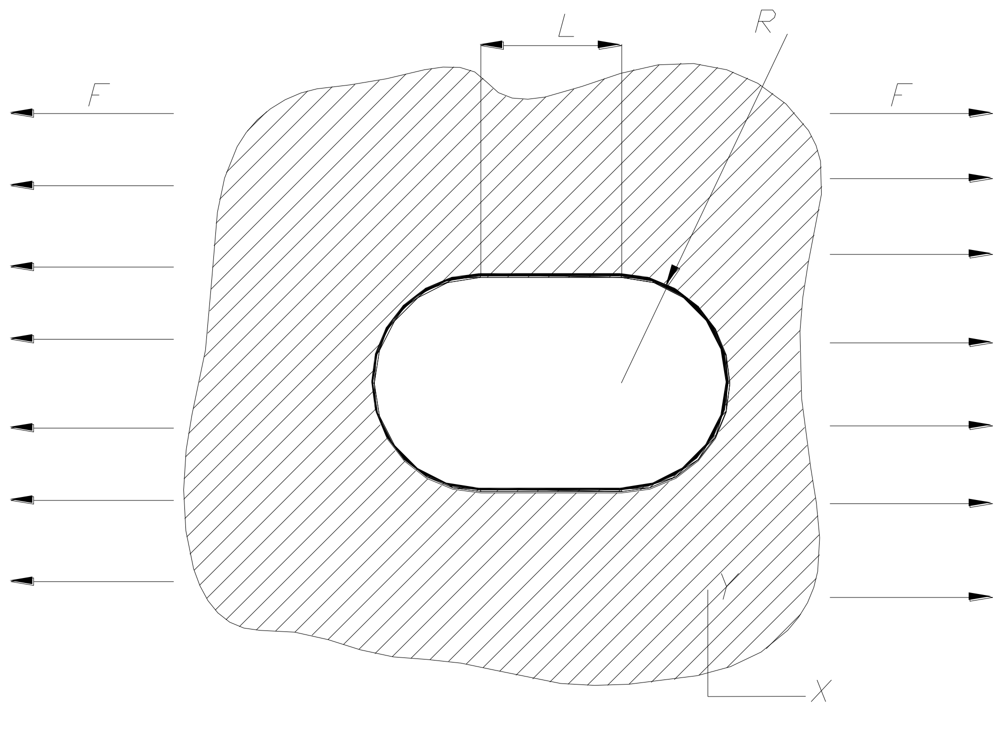


Рис 3.6 Расчетная схема задачи с овальным отверстием

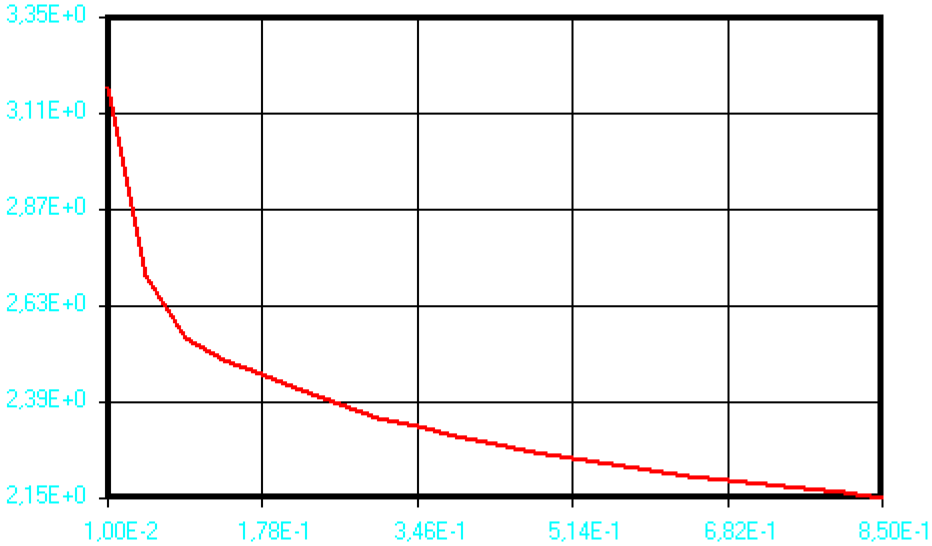


Рис 3.7 Зависимость коэффициента концентрации напряжений от коэффициента K

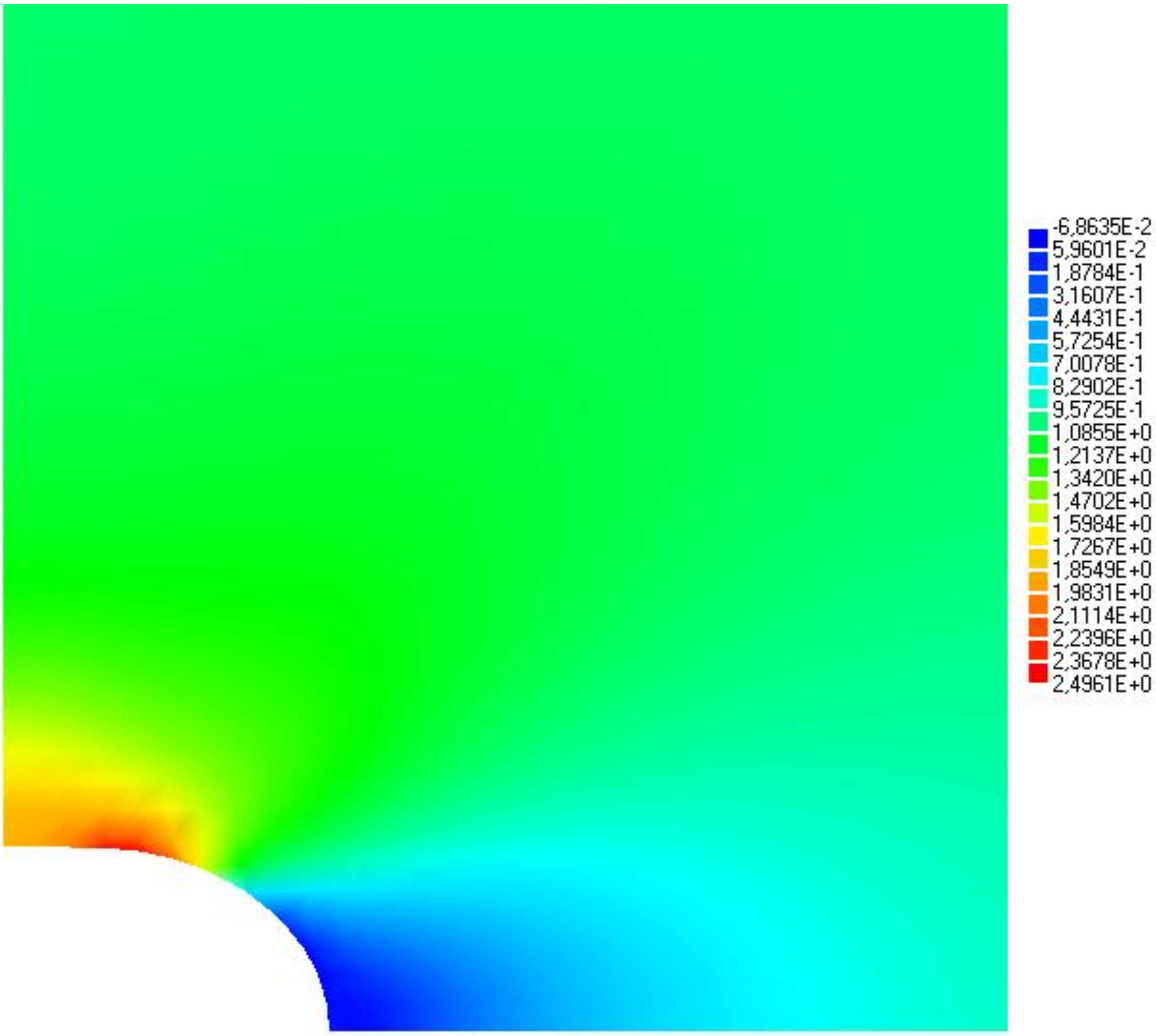


Рис 3.8 Напряжение σ_x при $K = 0{,}14$

3.4 Моделирование процесса получения искусственно-керамических покрытий и определение рациональной формы электрода

Под искусственной керамикой (ИК) понимается материал, полученный путем окисления алюминия до альфа-фазы. Создание ИК-слоя на поверхности алюминиевой детали приводит к повышению ее поверхностной твердости, износостойкости, улучшению фрикционных свойств, снижению тепло- и электропроводности. Образование ИК-слоя происходит под действием пульсирующего напряжения на поверхности алюминиевой детали, погруженной в слой электролита. Толщина ИК-слоя может достигать 300 мкм и более, причем этот слой, как правило, располагается по поверхности детали неравномерно. Неравномерность слоя ИК-покрытия и неоднородность его свойств являются факторами, снижающими эксплуатационные свойства покрываемой детали. В данном разделе рассмотрена математическая модель ИК-процесса, и выполнено решение задачи о подборе его режимов и параметров работы, обеспечивающих максимально однородное распределение толщины и свойств ИК-слоя по поверхности покрываемой поверхности цилиндрической полости.

3.4.1 Процесс ИК-покрытия и его математическая модель

Рассматривается процесс ИК-покрытия поверхности цилиндрической полости (рис. 3.9), выполненной в детали из алюминиевого сплава. Полость имеет геометрические размеры: диаметр $D = 55\ мм$ и высоту $H = 100\ мм$. Внутри полости помещен электрод (рис. 3.10), а пространство между поверхностью цилиндра и электродом заполнено раствором электролита. На цилиндр и электрод подается пульсирующее напряжение. Под действием градиента потенциала электрического тока на поверхности цилиндрической полости происходит превращение алюминия в Al_2O_3.

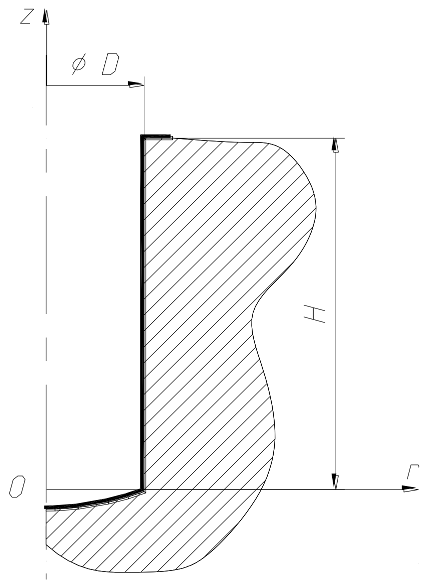


Рис. 3.9 Геометрическая форма цилиндрической полости

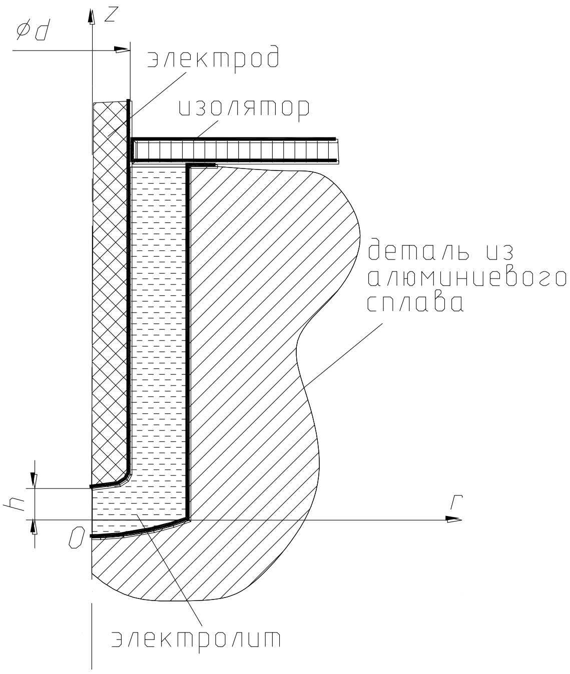


Рис. 3.10 Схема процесса ИК-покрытия

При формулировке математической модели процесса ИК-покрытия был введен ряд упрощающих гипотез:

- принимается, что распределение свойств ИК-покрытия по поверхности оксидируемого изделия будут тем равномернее, чем равномернее в каждый момент времени распределяется по этой поверхности плотность электрического тока;
- принимается, что распределение плотности переменного электрического тока по поверхности изделия имеет такой же характер, как если бы переменный источник питания был заменен постоянным.

Если принять электролит неподвижным, то потенциал электрического поля U в расчетной области удовлетворяет уравнению Лапласа. Поскольку задача является осесимметричной, будем рассматривать ее в цилиндрической системе координат (r, φ, z), где ось z является осью симметрии цилиндрической полости. В силу симметрии задачи, распределение потенциала не зависит от угла φ и уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0 .$$

Кроме того, потенциал электрического поля U должен удовлетворять граничным условиям: на поверхности цилиндра и электрода заданы значения потенциала P_1 и P_2 соответственно, на поверхности электролита условие электроизоляции – равенство нулю нормального к поверхности градиента потенциала

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

где n – внешняя нормаль к поверхности. В силу осевой симметрии, на оси цилиндра необходимо задать условие симметрии, которое в данном случае эквивалентно условию электроизоляции.

Зная распределение U можно найти плотность электрического тока:

$$j = \sigma \times grad(U)$$

где σ – электропроводность раствора электролита.

Известно, что качество ИК-покрытия – равномерность его толщины и механических свойств, зависит от того, насколько сильно отличается между собой плотность электрического тока в различных точках поверхности покрываемой детали. Эффективность выбора параметров процесса ИК-покрытия можно оценить с помощью следующего критерия качества:

$$\Delta = \frac{\delta j_i}{j_i}$$

где j_i – среднее значение плотности тока, вычисленное на оксидируемой поверхности, δj_i – среднеинтегральное отклонение значения плотности тока от среднего. Понятно, что чем меньше величина критерия Δ, тем равномернее будет ИК-покрытие поверхности детали.

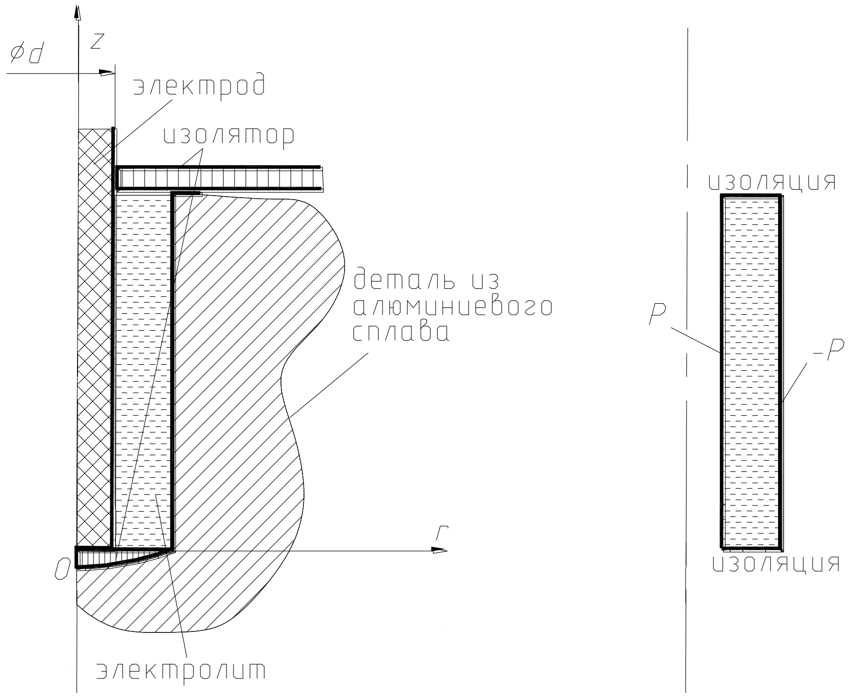
Кроме рассмотренного критерия, характеризующего равномерность распределения толщины и свойств ИК-покрытия, технический интерес представляет производительность процесса, т.е. скорость формирования ИК-слоя. Из физических соображений ясно, что скорость образования ИК-слоя тем выше, чем больше величина плотности электрического тока на поверхности покрываемой детали. Таким образом, и этот параметр ИК-процесса может быть исследован с помощью предлагаемой математической модели.

3.4.2 Первый вариант процесса ИК-покрытия

Рассмотрим упрощенную схему, в которой проходит ИК-покрытие только боковой поверхности цилиндра. В этом случае электрод имеет форму прямого цилиндра, дно которого изолировано, как показано на рис. 3.11, *а*. Расчетная схема для этой задачи приведена на рис. 3.11, *б*. Фактически эта задача является одномерной, и потенциал зависит только от радиуса. Критерий качества Δ равен нулю, то есть покрытие будет идеально равномерным. Интерес представляет исследование зависимости производительности процесса ИК-покрытия (т.е. плотности электрического тока) от величины диаметра электрода d.

Расчеты производились в программе REGIONS[5]. Проведена серия расчетов с различными значениями диаметра d. Результаты расчетов представлены на рис. 3.12 и рис. 3.13. В расчетах принято: $\sigma = 1\frac{1}{Ом \cdot м}$, $P = 1В$. В силу линейности задачи, для вычисления плотности тока при любых других значениях, можно просто умножить величину j на произведение $\sigma \cdot P$.

[5] Поскольку распределение потенциала описывается уравнением Лапласа, фактически были решены эквивалентные задачи о распределении температуры в осесимметричной постановке.



а *б*

Рис. 3.11 Реакционная зона (*а*) и расчетная область (*б*) в первом варианте ИК-процесса

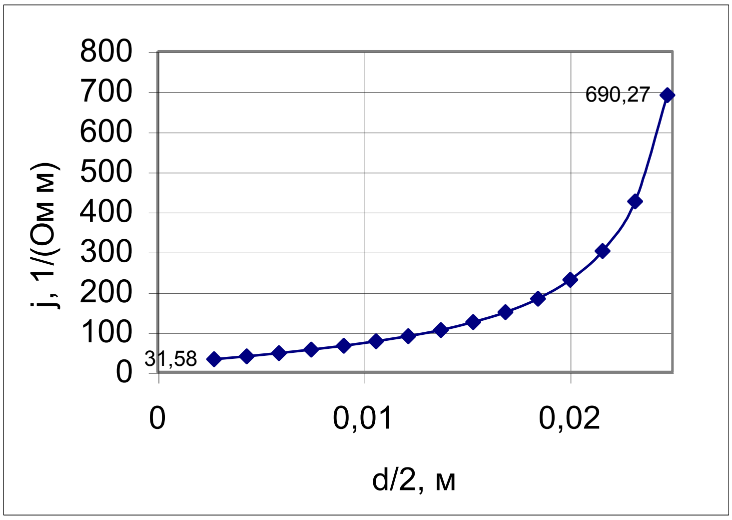


Рис. 3.12 Результаты расчетов по первому варианту ИК-процесса: зависимость плотности электрического тока j, характеризующего производительность ИК-процесса, от радиуса электрода $d/2$.

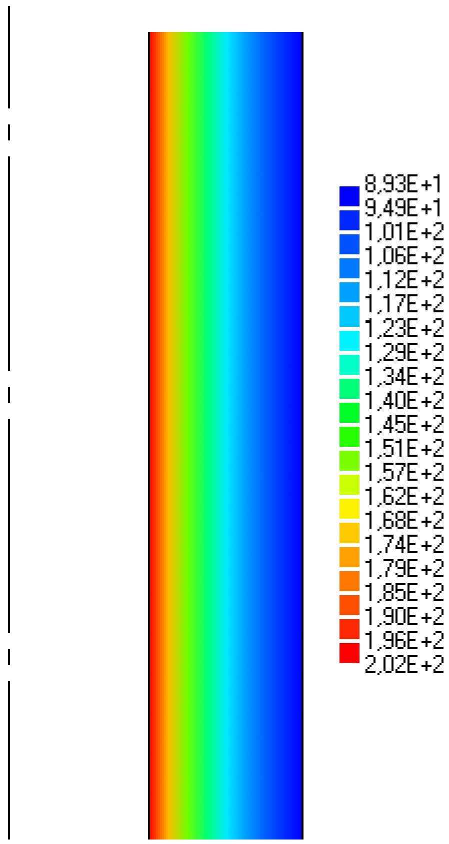


Рис. 3.13 Распределение плотности тока по области реакционной зоны ИК-процесса в 1-м варианте ($d = 24\ мм$)

Как видно из рис. 3.12, производительность ИК-процесса возрастает с увеличением диаметра электрода, причем эта зависимость имеет нелинейный характер. Можно предположить, что производительность обратно пропорциональна толщине слоя электролита, поскольку, если толщина стремиться к нулю, градиент должен стремиться к бесконечности. Для получения аналитической зависимости была проведена аппроксимация методом наименьших квадратов, для чего использовался разработанный автором и встроенный в REGIONS инструмент математического анализа. Однако, при простой обратно пропорциональной зависимости были получены большие ошибки аппроксимации. Тогда было сделано предположение, что в зависимость необходимо также включить экспоненциальную функцию. При такой аппроксимирующей функции было получено практически точное совпадение. Окончательно получено следующее выражение аппроксимирующей функции:

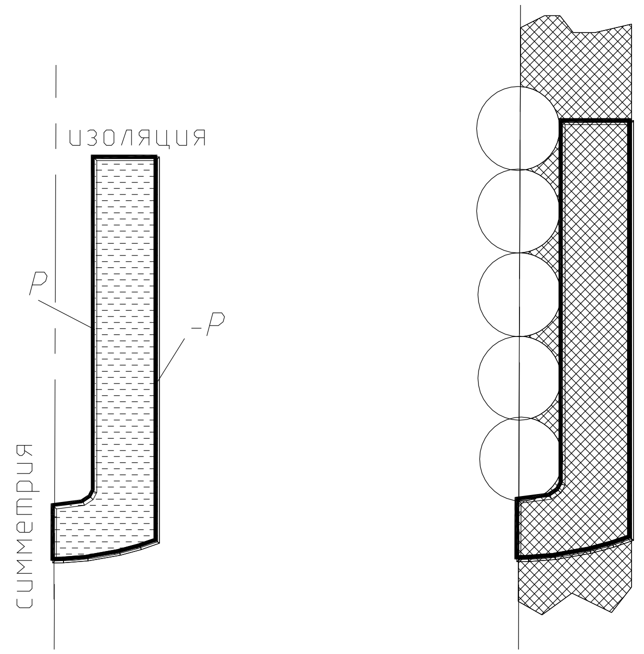
$$j(d) = -1025{,}22 + \frac{1{,}93}{R - x} + 976{,}65 e^{x} \quad 1/(\text{Ом} \times \text{м})$$

где $R = D/2$, $x = d/2$.

Эта формула обобщает данные компьютерного моделирования, и ее можно использовать при проектировании оснастки реакционной зоны ИК-процесса.

3.4.3 Второй вариант процесса ИК-покрытия

Рассмотрим полную схему, в которой проходит ИК-покрытие всей поверхности цилиндрической полости. Расчетная схема для этой задачи приведена на рис. 3.14, *а*.



а) б)

Рис. 3.14 Расчетная схема для второго варианта ИК-процесса (*а*) и схема погружения в фиктивные области (*б*)

Краевая задача о распределении потенциала в области реакционной зоны ИК-процесса является осесимметричной, как и в 1-м варианте, однако здесь эта задача является двумерной, т.к. потенциал электрического поля U зависит от двух переменных: r и z.

Целью компьютерного моделирования является определение геометрических параметров ИК-процесса (d и h), при которых критерий качества Δ будет принимать минимальное значение, т.е. равномерность ИК-покрытия будет максимальной. Для этого проводилась серия расчетов при варьировании d и h. В программе REGIONS это реализуется параметризацией геометрии с помощью внутреннего языка программирования. С целью выполнения критерия сходимости метода фиктивных канонических областей, заданная расчетная область погружалась в пересечение ФКО, образованние бесконечным цилиндром и набором сфер, центры которых расположены вдоль оси z, как показано на рис 3.14, *б*. Для обеспечения максимальной точности расчетов использовалось адаптивное по отношению к геометрии расчетной области расположение сфер, т.е. их количество и положение центров выбирались в зависимости от текущих значений d и h.

Результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 3.15 в виде номограммы, изображающей зависимость критерия качества Δ от геометрических параметров цилиндрической полости d и h. Из номограммы получены искомые значения $d = 0{,}044\,м$, $h = 0{,}003\,м$. При таких геометрических параметрах $\Delta \approx 0{,}08$, т.е. среднеинтегральное отклонение плотности тока от среднего значения составило не более 8%. На рис. 3.16-3.18 приведены расчетные распределения потенциала и плотности электрического тока в реакционной зоне при данных геометрических параметрах. Как видно из картин изолиний, даже при оптимальном сочетании размеров реакционной зоны, имеет место некоторая неравномерность распределения плотности тока, которая реализуется на небольшом участке вблизи угловой точки. Аналогичные результаты наблюдались и в остальных случаях.

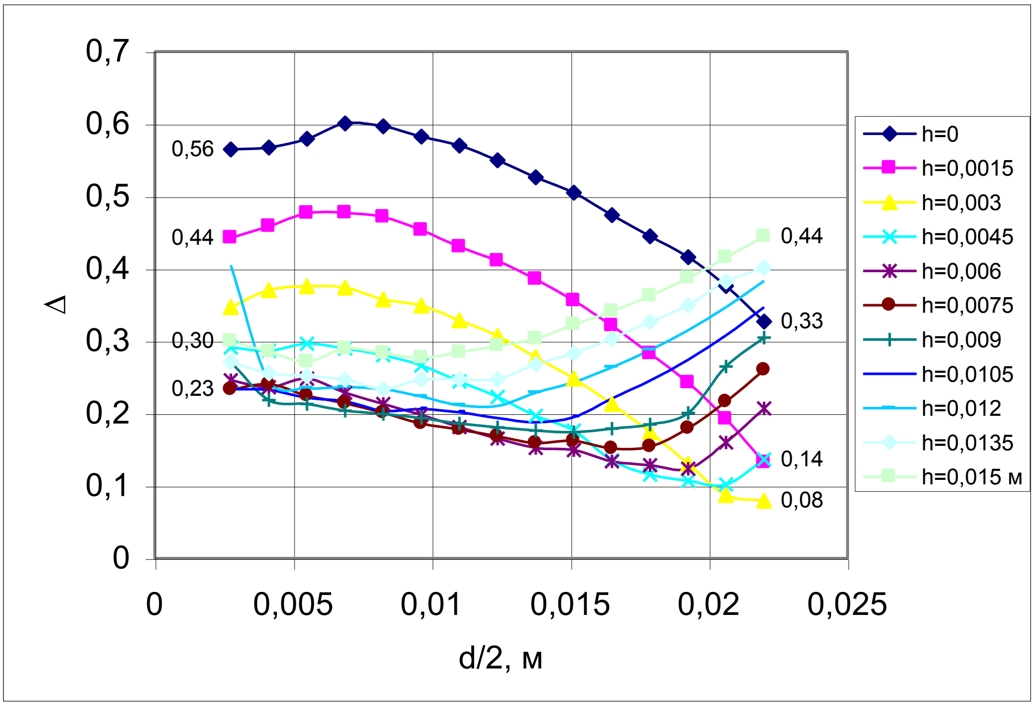


Рис. 3.15 Зависимость критерия качества Δ от геометрических параметров реакционной зоны ИК-процесса

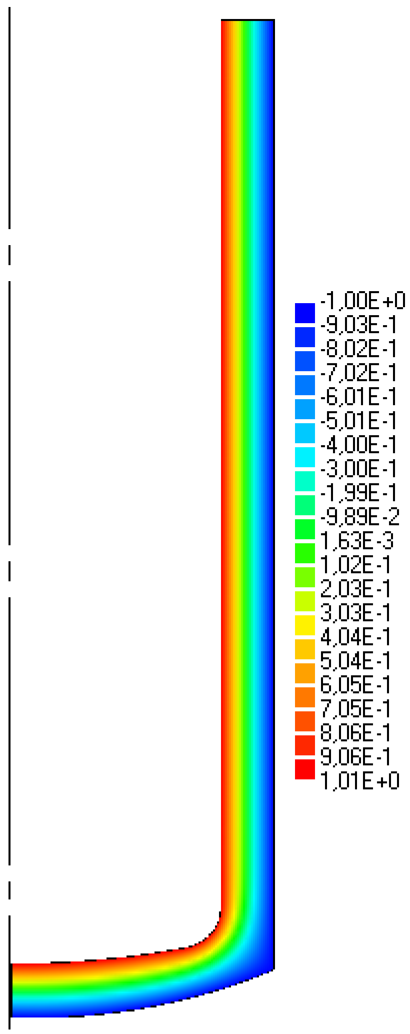


Рис. 3.16 Распределение потенциала в реакционной зоне ИК-процесса при геометрических параметрах: $d = 0{,}044\ м$, $h = 0{,}003\ м$

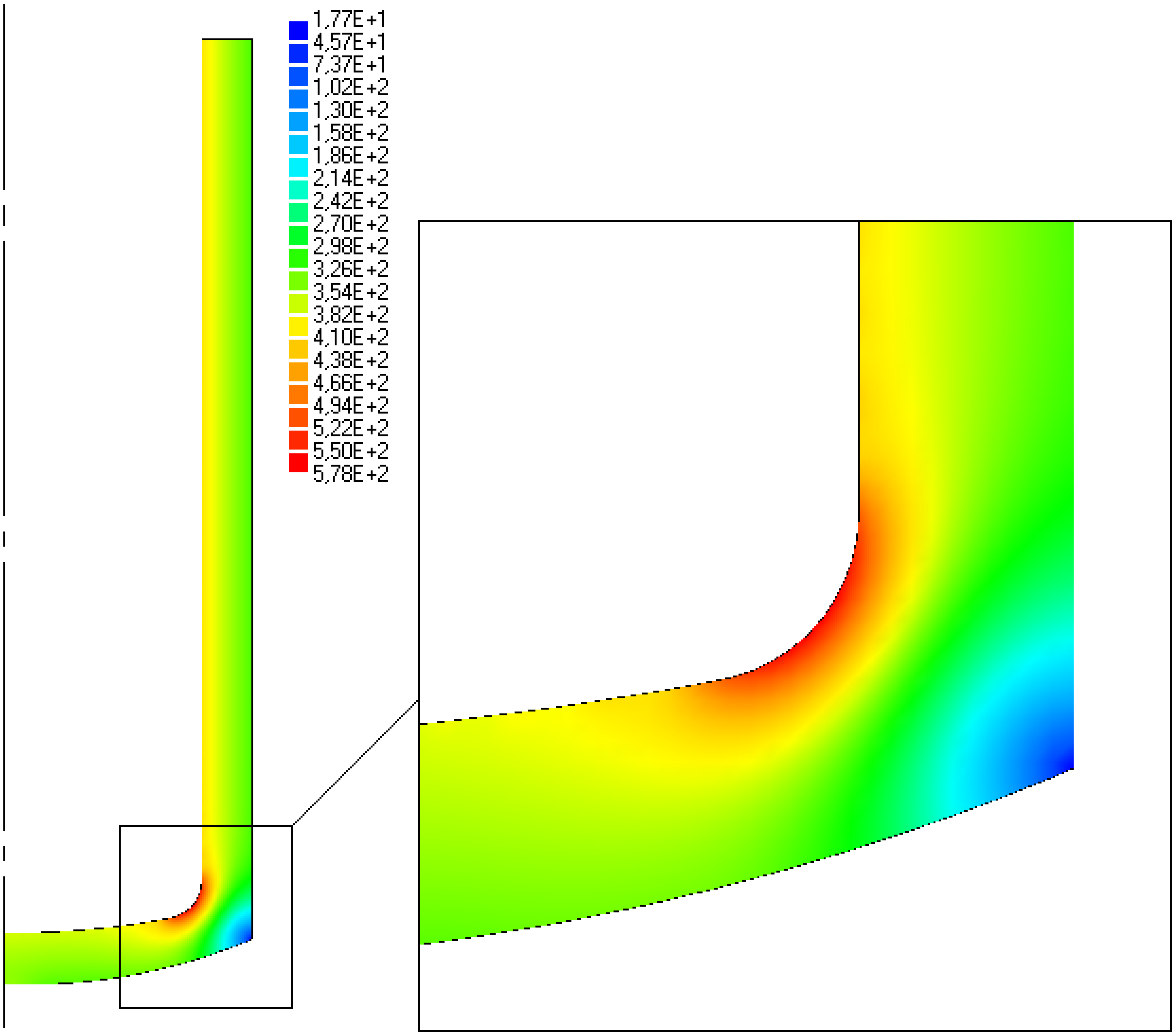


Рис. 3.17 Распределение плотности электрического тока при геометрических параметрах: $d = 0{,}044$ *м*, $h = 0{,}003$ *м*

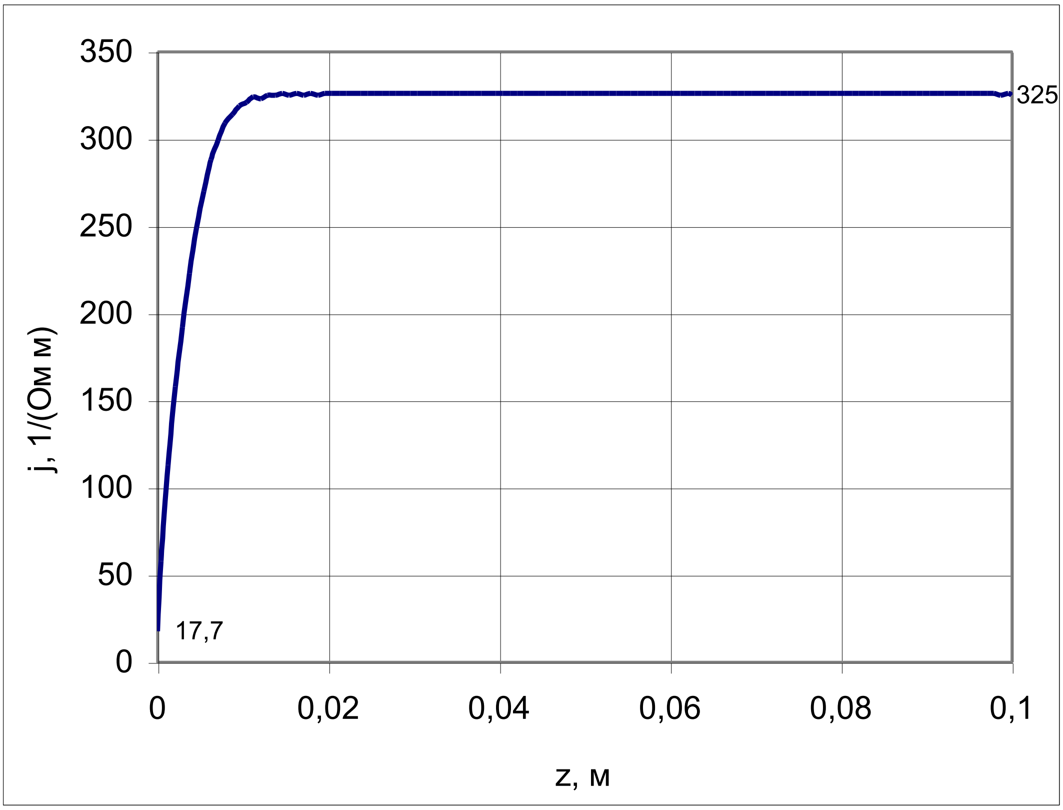


Рис. 3.18 Распределение плотности тока на внешней боковой поверхности цилиндрической полости вдоль оси z при геометрических параметрах реакционной зоны: $d = 0{,}044\ м$, $h = 0{,}003\ м$

3.4.4 Третий вариант процесса ИК-покрытия

Ранее была получена рацтональная форма электрода, в зависимости от величины диаметра электрода d и смещения h. Получены значения $d = 0{,}044\ м$, $h = 0{,}003\ м$. Проблемной зоной является участок вблизи угловой точки. Поскольку плотность тока на этом участке меньше, чем на остальных, можно предположить, что равномерность можно увеличить, если поверхность электрода приблизить к поверхности цилиндра вблизи проблемной точки, как показано на рис. 3.19.

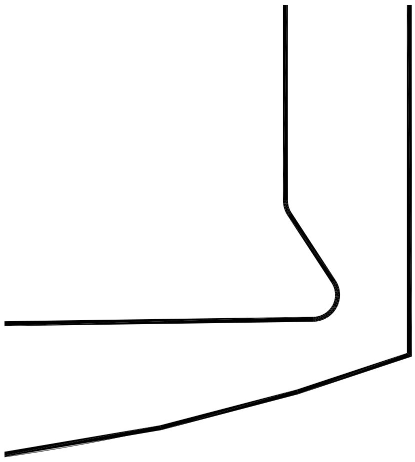


Рис. 3.19 Предполагаемая форма электрода вблизи проблемной точки

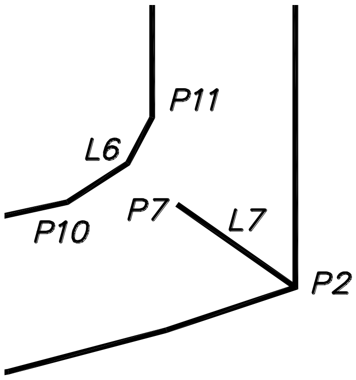


Рис. 3.20 Первый этап построения формы электрода

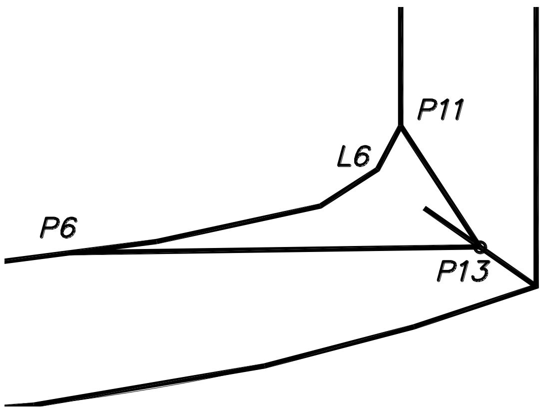


Рис. 3.21 Второй этап построения формы электрода

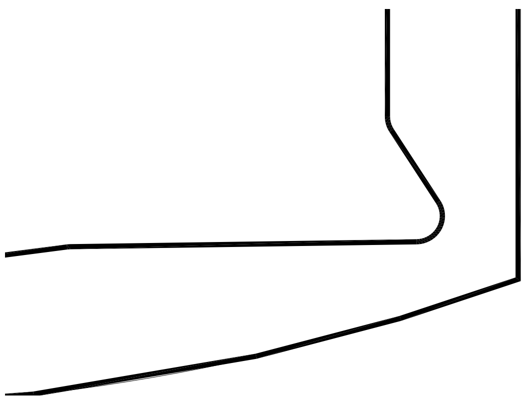


Рис. 3.22 Третий этап построения формы электрода

Для этого можно выполнить следующее: провести линию $L7$, соединяющую угловые точки электрода и цилиндра – $P7$ и $P2$ (рис. 3.20). На этой линии, в некотором соотношении p, поставить точку $P13$ и провести две линии $L8$ и $L9$ (рис. 3.21). Затем скруглить эти линии некоторым радиусом $R_f = k L_9$, где k – некоторый коэффициент, L_9 – длина линии $L9$ (рис. 3.22). Исследуем зависимость критерия качества от величин безразмерных параметров p и k.

Решение задачи будем проводить не в осесимметричной постановке, а в плоской. Для обоснования возможности такой замены был проведен расчет с плоской постановке с исходной (второй вариант покрытия) геометрией. Этот расчет показал, что хотя величина плотности тока на поверхности цилиндра не совпадает с величиной по осесимметричной постановке, сам критерий качества совпал с точностью до десятых долей процента. То есть расчеты в плоской постановке будут отражать качественный, но не количественный результат, что достаточно для определения рациональной геометрической формы (геометрических параметров).

Для определения значений геометрических параметров был проведен ряд расчетов в программе REGIONS. По результатам расчетов построена номограмма зависимости критерия качества Δ от исследуемых параметров рис. 3.23.

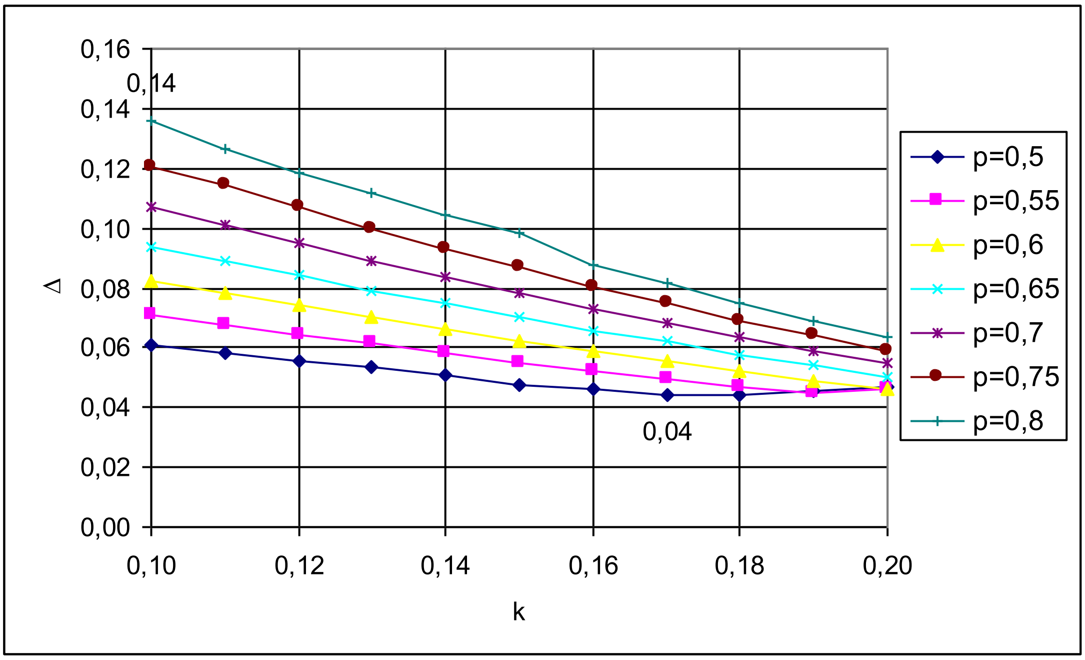


Рис. 3.23 Зависимость критерия качества от величин p и k

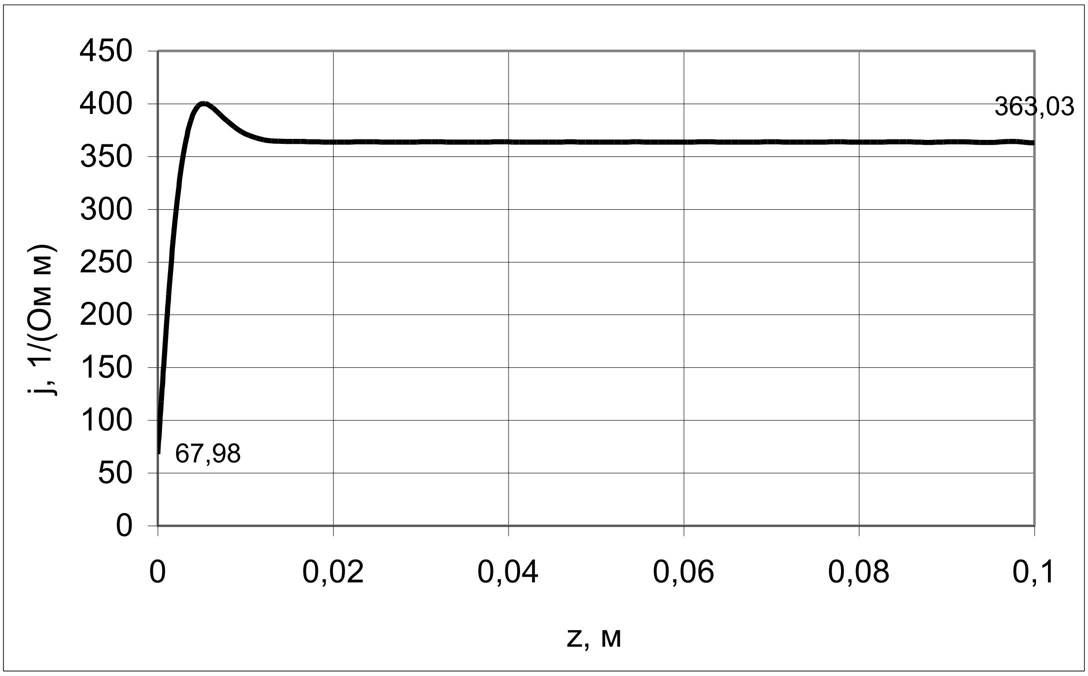


Рис. 3.24 Распределение плотности тока на внешней боковой поверхности цилиндрической полости вдоль оси при геометрических параметрах реакционной зоны: $p = 0{,}5$ и $k = 0{,}17$

Определены значения параметров $p = 0{,}5$ и $k = 0{,}17$. При данных параметрах величина критерия качества составляет $\Delta \approx 0{,}04$. Таким образом, эта величина снизилась примерно в два раза, по сравнению с исходной геометрией.

На рис. 3.24–3.26 представлены результаты расчетов для данных значений параметров.

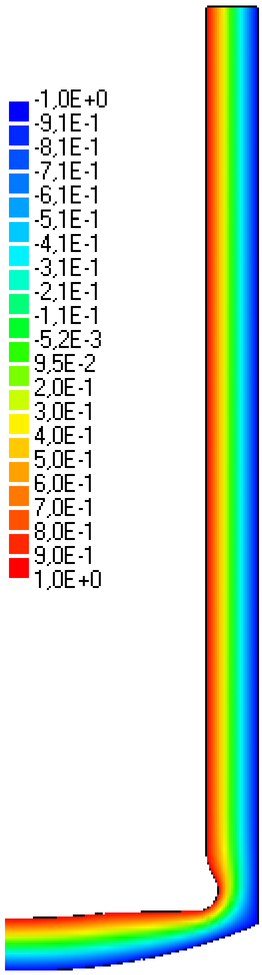


Рис. 3.25 Распределение потенциала электрического поля при геометрических параметрах: $p = 0{,}5$ и $k = 0{,}17$

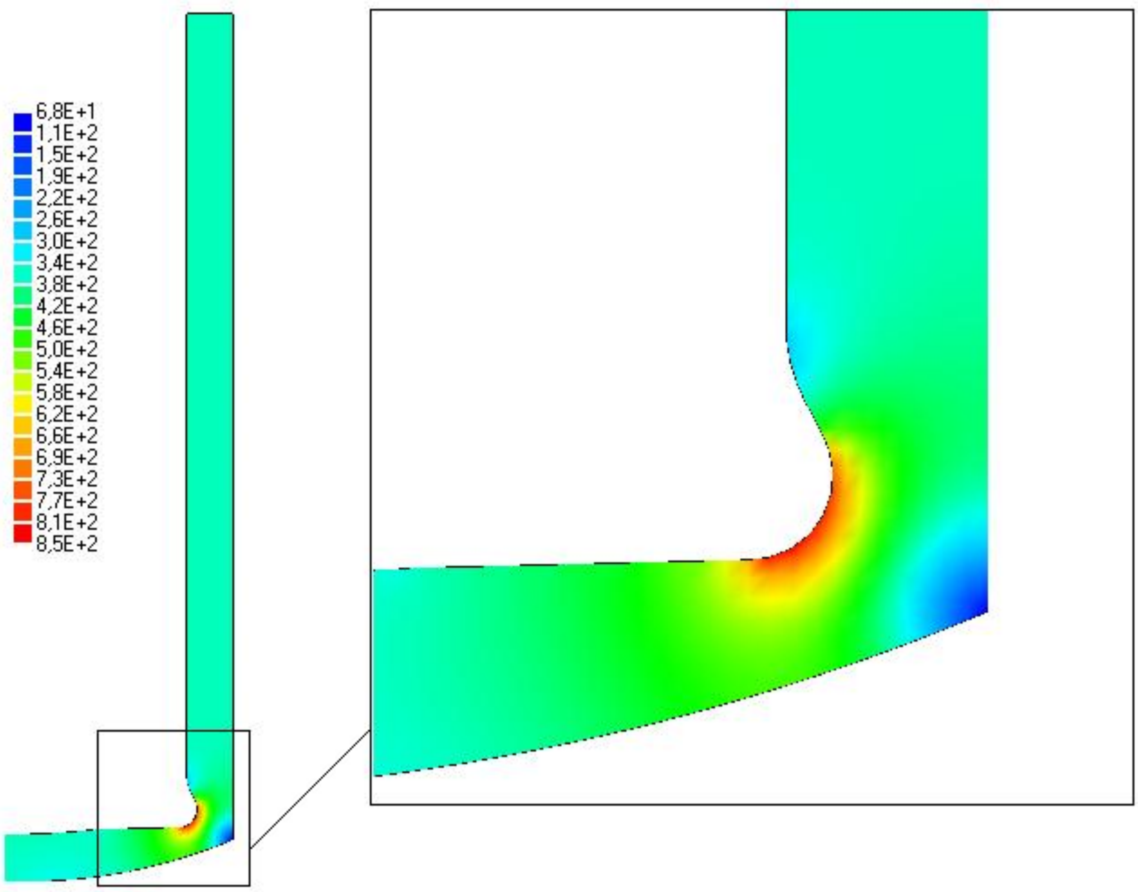


Рис. 3.26 Распределение плотности электрического тока при геометрических параметрах: $p = 0{,}5$ и $k = 0{,}17$

Итак, представленные результаты компьютерного моделирования позволяют сделать следующие практические выводы:

1. В первом варианте ИК-процесса производительность зависит от диаметра электрода – чем больше диаметр, тем выше производительность. Эта зависимость имеет нелинейный характер, который может быть приближенно представлен полученной аналитической формулой.

2. Для второго варианта ИК-процесса определены геометрические параметры, обеспечивающие максимальную равномерность ИК-покрытия: $d = 0{,}044\ м$, $h = 0{,}003\ м$. При таких параметрах среднеинтегральное отклонение плотности тока от среднего значения составит не более 8%. Проблемной зоной является участок вблизи угловой точки. Здесь плотность электрического тока имеет максимальную неравномерность, и, значит, качество ИК-покрытия будет хуже, чем на остальных участках рассмотренной цилиндрической полости.

3. Для третьего варианта ИК-процесса определены значения параметров $p = 0{,}5$ и $k = 0{,}17$. При данных параметрах величина критерия качества составляет $\Delta \approx 0{,}04$. Таким образом, эта величина снизилась примерно в два раза, по сравнению с исходной геометрией второго варианта.

Полученные практические результаты использованы на Осинском машиностроительном заводе при настройке опытно-промышленной установки искусственно-керамических покрытий. Эти результаты так же вошли в проект цеха выполненного ЗАО “ИнститутПромТехСтрой”. Акт внедрения прилагается.

3.5 Применение метода фиктивных канонических областей для верификации конечноэлементного расчета

Метод ФКО позволяет делать надежную оценку решения, поэтому, в частности, может применяться для верификации расчетов, выполненных другими методами. Одна из таких задач была решена с помощью программы REGIONS.

При проектировании рессоры автомобиля возникла необходимость определения максимальных перемещений при ее нагружении. Это привело к постановке следующей задачи: определить перемещения консольной балки переменного сечения, изображенной на рис. 3.27, нагруженной сосредоточенной силой. Консольная балка состоит из трех секций. Первая и третья секции постоянной толщины, вторая – переменной, ее толщина меняется линейно (схематично балка изображена на рисунке 3.27). Значения геометрических параметров балки приведены в таблице 3.4. Ширина балки W постоянная. Материал балки: модуль Юнга E = 21000 кгс/мм^2, коэффициент Пуассона ν = 0,28. Величина сосредоточенной силы P = 116,67 кгс.

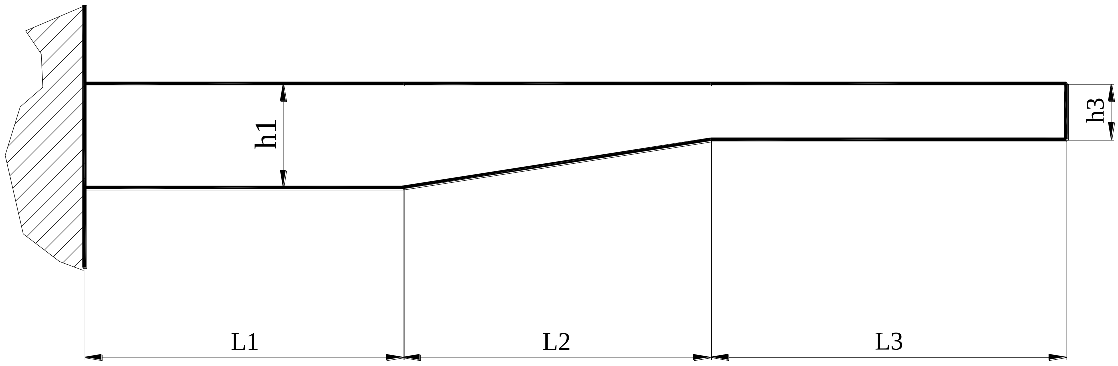


Рис. 3.27 Расчетная схема задачи

Таблица 3.4 Значения геометрических параметров консоли.

Параметр	h1	h3	L1	L2	L3	W
Значение, мм	13,4	8	107	478	322	75

Данная задача была решена методом конечных элементов двумя независимыми расчетчиками в программе ANSYS. Результаты расчетов – максимальное перемещение консоли, приведены в таблице 3.5. Как видно из таблицы, не смотря на кажущуюся простоту задачи, результаты расчетов отличаются на достаточно большую величину – порядка 6,6%. Таким образом, возник вопрос, какие же результаты являются более точными, и какую из конечноэлементных моделей можно использовать в дальнейших расчетах.

С целью верификации результатов расчетов, было выполнено решение задачи методом ФКО в программе REGIONS. Для этого использовалась следующая расчетная схема: исходная балка, согласно методике композиции расчетной области [157], была разбита на три подобласти, каждая из которых соответствует одному участку балки. Каждый из участков был вписан в пять ФКО – один “слой” и четыре “полости”. ФКО “слой” имеет следующую геометрическую интерпретацию – это бесконечная вдоль одной из осей тонкая полоса ($H << L$) с некоторым периодом L. Геометрическая интерпретация ФКО “полость” – круглая полость в бесконечном пространстве (см.

приложение). Общая схема выбора ФКО для каждого участка балки приведена на рис. 3.28.

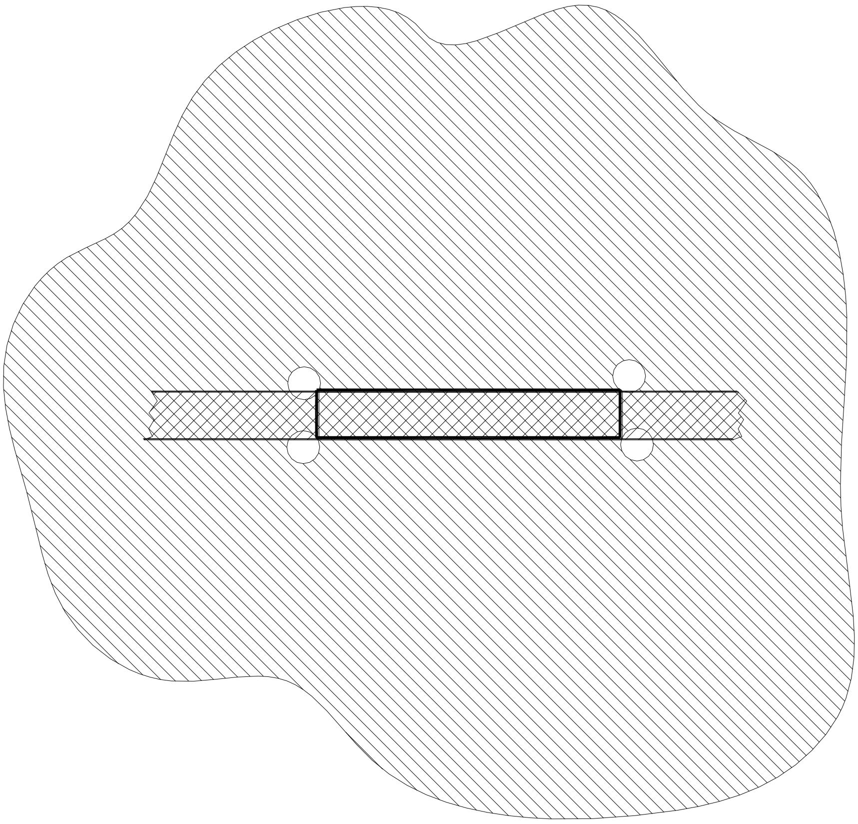


Рис. 3.28 Общая схема погружения секции балки в ФКО

При такой схеме выбора ФКО было получено решение, для которого максимальная невязка граничных условий составила всего порядка 0,01%. Результаты данного аналитического решения задачи в программе REGIONS приведены на рис. 3.29 и в таблице 3.5. При этом видно, что результаты расчета по второй конечноэлементной модели достаточно хорошо совпадают с решением по методу ФКО, в то время как первая модель дает погрешность порядка 6,6 %.

Таблица 3.5 Результаты расчетов.

Метод / Модель	Результат (максимальное перемещение U_y, мм)	Погрешность, %
МКЭ/1	102,37	6,62±0,01
МКЭ/2	95,97	0,04±0,01
ФКО	96,02	0,01
МКЭ/верифицированная	96,01	0,01±0,01

Результаты аналитического решения были использованы для параметрической идентификации конечноэлементной модели, решение по которой полностью согласуется с аналитическим (таблица 3.5). В качестве параметра для идентификации конечноэлементной модели использовался максимальный размер элемента. Верифицированная конечноэлементная модель балки переменного сечения впоследствии была использована для дальнейших более сложных расчетов в программе ANSYS – в нелинейной постановке и контактных задач.

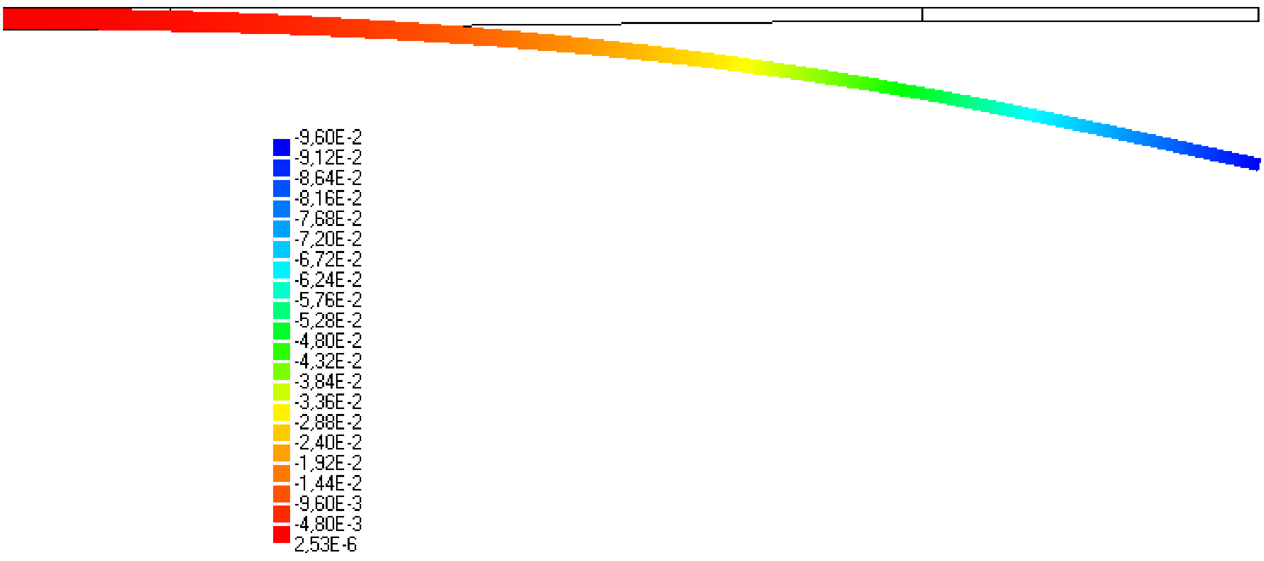


Рис. 3.29 Распределение перемещения U_y (м) автомобильной рессоры, полученное программой REGIONS

Заключение

В диссертационной работе выполнен краткий исторический обзор развития методов решения краевых задач, из которого следует:

1. Существует множество методов решения краевых задач, которые имеют свои преимущества и недостатки, обуславливающие область применения каждого из них.
2. Универсального метода, оптимального во всех случаях не существует.
3. Разработка новых методов и усовершенствование существующих остается актуальной задачей.
4. По мнению автора диссертации, одним из главных критериев выбора метода решения в настоящее время является надежность получаемых результатов.
5. Метод ФКО, с этой точки зрения, является перспективным, поскольку позволяет сравнительно легко выполнять надежные оценки точности решений, и в то же время решать задачи с достаточно сложной геометрией.

Метод ФКО распространен на решение новых классов краевых задач – задач термоупругости, нестационарных задач теплопроводности, контактных задач:

1. Для решения задач термоупругости автором получены частные решения уравнений термоупругости, соответствующие общим решениям задач теплопроводности. Для плоских задач (ПНС и ПДС) получены частные решения в декартовой и цилиндрической системах координат, для осесимметричных – в цилиндрической и сферической системах. Все эти решения также заложены в программу, реализован алгоритм решения задач термоупругости на основе решений задач теплопроводности.
2. Для решения нестационарных плоских задач теплопроводности автором получены общие решения соответствующих дифференциальных уравнений в декартовой и цилиндрической системах координат. Показана возможность решения методом ФКО нестационарных задач с изменяющимися границами. Эта возможность также реализована в программе REGIONS и продемонстрирована на примере решения модельной задачи.
3. Показана возможность решения методом ФКО контактных задач теории упругости. Разработан итерационный контактный алгоритм, предназначенный для метода ФКО. Особенностью алгоритма является то, что на каждой итерации необходимо формировать матрицу разрешающих уравнений, отвечающую только за условия на контактной границе, что позволяет существенно экономить время вычислений. Приведен пример решения контактной задачи.

Для повышения универсальности и точности метода ФКО предложены и реализованы новые алгоритмы и методы:

1. Алгоритм оптимизации расположения ФКО выполняет размещение выбранных фиктивных областей таким образом, чтобы невязка граничных условий (значение функционала) была минимальной.
2. Для исключения из решения ненужных слагаемых, наличие которых может давать дополнительную погрешность, предложен алгоритм, который основан на анализе значений граничных функционалов при поочередном исключении слагаемых из полученного решения. Как показывает пример, это позволяет существенно повысить точность решения при одинаковом числе слагаемых.
3. Алгоритм оптимизации весовых коэффициентов для МНК, обеспечивает равномерное распределение невязок граничных условий по границе области. Часто это бывает необходимо сделать при наличии различных видов граничных условий, например, когда в задаче теории упругости заданы условия в перемещениях и напряжениях. Реализована возможность оптимизации, как по

максимальным значениям невязок, так и по среднеинтегральным. Работа алгоритма продемонстрирована на примере.

4. В задачах с разрывными граничными условиями почти всегда возникают проблемы вблизи точек разрыва. Автором предложен метод игнорирования ε-окрестности, который позволяет существенно улучшить качество решения в таких точках, не снижая точность на остальных участках границы. Проведен ряд расчетов для определения оптимальных значений ε-окрестности в плоских задачах теплопроводности.

Идеи алгоритмов исключения слагаемых и оптимизации весовых коэффициентов заимствованы из сферы искусственного интеллекта. Применение всех алгоритмов и метода игнорирования ε-окрестности позволяет существенно повысить точность решений, получаемых методом ФКО.

Все предложенные в диссертации алгоритмы реализованы в программе REGIONS, предназначенной для решения краевых задач методом ФКО. Программа REGIONS применена для решения ряда практических задач:

1. Расчет НДС инструмента (плашки) для изготовления детали “шпонка”;
2. Задача определения рациональной формы отверстия в ободе диска газотурбинного двигателя;
3. Задача моделирования процесса получения искусственно-керамических покрытий и определения рациональной формы электрода;
4. Задача верификации конечноэлементного расчета.

Кроме того, программа REGIONS применяется в учебном процессе в вузах г. Перми.

Список литературы

1. Алексидзе М.А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям / М.А. Алексидзе. – М. : Наука, 1978. – 315 с.
2. Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач / М.А. Алексидзе. – М. : Наука, 1991. – 351 с.
3. Араманович А.Г. Уравнения математической физики / А.Г. Араманович, В.И. Левин. – М. : Наука, 1969. – 287 с.
4. Арсенин В.Я. Математическая физика / В.Я. Арсенин. – М. : Наука, 1966. – 367 с.
5. Бартеньев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL / О.В. Бартеньев. – М. : Диалог МИФИ, 2000. – 448 с.
6. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 630 с.
7. Безухов Н.И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач / Н.И. Безухов, О.В. Лужин. – М. : Высшая школа, 1974. – 200 с.
8. Бейтмен Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2 : Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1970. – 328 с.
9. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М. : Мир, 1984. – 496 с.
10. Блох В.И. Функции напряжений в теории упругости / В.И. Блох // Прикл. математика и механика. – 1950. – Т. 14, № 4. – С. 415-422.
11. Блох В.И. Об использовании плоскостных гармонических функций в решениях трехмерных задач теории упругости изотропного тела / В.И Блох // Известия вузов. Математика. – 1960. – № 2. – С. 19-29.
12. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. – М. : Мир, 1964. – 517 с.
13. Большаков А. Ю. Напряженно-деформированное состояние трехмерного цилиндра / А.Ю. Большаков, В.А. Елтышев // Напряженно-деформированное состояние и прочность конструкций. – Свердловск : Изд. УНЦ АН СССР, 1982. – С. 3-7.
14. Большаков А.Ю. Об общности одного решения теории упругости / А.Ю. Большаков // Краевые задачи упругих и неупругих систем. – Свердловск : Изд. УНЦ АН СССР, 1985. – С. 73-75.
15. Большаков А.Ю. О решении пространственных задач теории упругости методом Фурье / А.Ю. Большаков, В.А. Елтышев // Статические и динамические задачи упругости и вязкоупругости. – Свердловск : Изд. УНЦ АН СССР, 1983. – С. 83-88.
16. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М. : Мир, 1987. – 525 с.
17. Валиджанов Х. Решение первой краевой задачи теории упругости методом источников / Х. Валиджанов // Известия АН УзССР. Сер. техн. наук. – 1972. – № 1. – С. 45-47.
18. Векуа И.Н. О полноте системы гармонических функций в пространстве / И.Н. Векуа // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 90, № 4. – С. 495–498.
19. Волковысский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковысский, И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц. – М.: Физматгиз, 1975. – 150 с.

20. Ворович И.И. Функциональный анализ и его приложения в механике сплошной среды: учебное пособие / И.И. Ворович, Л.П. Лебедев. – М. : Вузовская книга, 2000. – 320 с.
21. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. – М. : Наука, 1967. – 416 с.
22. Галеркин Б.Г. К вопросу об исследовании напряжений и деформаций в упругом изотропном теле / Б.Г. Галеркин // Доклады АН СССР. Сер. А. – 1930. – № 14. – С. 353-358.
23. Галлагер Р. Метод конечных элементов / Галлагер Р. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
24. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
25. Гладкий С.Л. О возможностях метода фиктивных канонических областей для решения задач теории упругости / С.Л. Гладкий, Н.И. Симакина, Л.Н. Ясницкий // Вестник ПГТУ. Динамика и прочность машин. – Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2000. – № 1. – С. 114-122.
26. Гладкий С.Л. Алгоритмы оптимизации базисных разложений в методе фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий, Л.Н. Ясницкий // Вестник ПГТУ. Динамика и прочность машин. – Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2001. – № 3. – С. 131-141.
27. Гладкий С.Л. Решение задач линейной термоупругости методом фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий, Л.Н. Ясницкий // Вестник ПГТУ. Динамика и прочность машин. – Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2003. – № 4. – С. 79-90.
28. Гладкий С.Л. Компьютерное моделирование и оптимизация процесса получения искусственно-керамических покрытий / С.Л. Гладкий, Н.А. Степанов, Л.Н. Ясницкий // Вестник ПГТУ. Динамика и прочность машин. – Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2005. – № 5. – С. 142-149.
29. Гладкий С.Л. Новые перспективы аналитических методов в связи с успехами искусственного интеллекта / С.Л. Гладкий, Н.И. Симакина, Л.Н. Ясницкий // VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Тезисы докладов. – Пермь, 2001. – Т. 2. – С. 57.
30. Гладкий С.Л. Система интеллектуального математического моделирования краевых задач в механике сплошных сред / С.Л. Гладкий // X Всероссийская конференция молодых ученых “Математическое моделирование в естественных науках”. Тезисы докладов. – Пермь, 2001. – С. 51-52.
31. Гладкий С.Л. Решение нестационарных задач теплопроводности методом фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий // XII Всероссийская конференция молодых ученых “Математическое моделирование в естественных науках”. Тезисы докладов. – Пермь, 2003. – С. 8.
32. Гладкий С.Л. Аналитическая система решения краевых задач математической физики / С.Л. Гладкий, Л.Н. Ясницкий // Аэрокосмическая техника и высокие технологии: Всероссийская научно-техническая конференция. – Пермь, 2002. – С. 81.
33. Гладкий С.Л. О проектировании изделий ответственного назначения / С.Л. Гладкий, Н.И. Симакина, Л.Н. Ясницкий // Аэрокосмическая техника и высокие технологии: Всероссийская научно-техническая конференция. – Пермь, 2002. – С. 82.
34. Гладкий С.Л. Опыт тестирования системы ANSYS / С.Л. Гладкий, В.А. Ощепков, Л.Н. Ясницкий // Материалы XL международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”. Математика. – Новосибирск, 2002. – С. 82-83.

35. Гладкий С.Л. Аналитическое решение краевых задач математической физики с использованием искусственного интеллекта / С.Л. Гладкий, А.В. Семенова, Л.Н. Ясницкий // Труды XXIV конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. – Москва, 2002. – С. 50-52.
36. Гладкий С.Л. Об оценке погрешности метода фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий, Л.Н. Ясницкий // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – Москва, 2002. – № 6. – С. 69-75.
37. Гладкий С.Л. Процедура решения контактных задач методом фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий // Труды III Всероссийская конференции по теории упругости с международным участием. – Ростов-на-Дону, Азов, 2003. – С. 102.
38. Гладкий С.Л. Аналитическое решение задач термоупругости методом фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий // Тезисы докладов 13-ой зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь, 2003. – с. 102.
39. Гладкий С.Л. Интеллектуальное компьютерное математическое моделирование / С.Л. Гладкий, Н.А. Степанов, Л.Н. Ясницкий. – Пермь: из-во Пермского государственного университета, 2005. – 158 с.
40. Гладкий С.Л. Верификация численных расчетов методом фиктивных канонических областей / С.Л. Гладкий, Н.Ф. Таланцев, Л.Н. Ясницкий // Вестник Пермского университета. Математика, механика, информатика. – Пермь : из-во Пермского государственного университета, 2006. – № 4. – С. 18-27.
41. Гладкий С.Л. Экспертная система для точного решения краевых задач механики / С.Л. Гладкий, Л.Н. Ясницкий // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Тезисы докладов. – Нижний Новгород, 2006. – Т. 3. – С. 67.
42. Гладкий С.Л. Аналитическое решение краевых задач / С.Л. Гладкий, Л.Н. Ясницкий // Материалы международной научно-методической конференции “Актуальные проблемы математики, механики, информатики”.– Пермь: из-во Пермского государственного университета, 2006. – С. 114-116.
43. Гладкий С.Л. Интеллектуальное моделирование физических проблем / С.Л. Гладкий, Н.А. Степанов, Л.Н. Ясницкий. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 200 с.
44. Годунов С.К. Разностные схемы: введение в теорию / С.К Годунов. – М. : Наука, 1977. – 439 с.
45. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
46. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости / А.Н. Гузь, Ю.Н. Немиш. – Киев: Вища школа, 1982. – 352 с.
47. Гусман С.Я. О критерии выбора базовых функций в методе фиктивных канонических областей / С.Я. Гусман, Л.Н. Ясницкий // Геометрическое моделирование и начертательная геометрия. Тезисы докладов Уральской научно-технической конференции. – Пермь : Изд. УрО АН СССР, 1988. – С. 46-48.
48. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики / Н.М. Гюнтер. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 416 с.
49. Деев В.М. О формах общего решения пространственной задачи теории упругости, выраженных при помощи гармонических функций / В.М. Деев // Прикл. математика и механика. – 1959. – Т. 23. – № 6. – С.132-133.

50. Деев В.М. Однородные общие решения в статической задачи теории упругости / В.М. Деев, Н.А. Нечепоренко // Украинский математический журнал. – 1971. – Т. 23, № 6. – С. 44-56.
51. Дезин А. Общие вопросы теории граничных задач / А. Дезин. – М. : Наука, 1980. – 208 с.
52. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М. : Наука, 1967. – 368 с.
53. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V / В.П. Дьяконов. – М. : Солон, 1998. – 400 с.
54. Елтышев В.А. Высокоточный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния твердотопливных зарядов сложной трехмерной конфигурации / В.А. Елтышев // Сборник научных трудов 12-ой НПИ ПВВКИУ РВ. – Пермь, 1995. – С. 22-31.
55. Елтышев В.А. Методика расчета составных анизотропных конструкций типа оболочка – массивное тело сложной пространственной формы / В.А. Елтышев // Сборник трудов “Расчеты на прочность”. – М. : Машиностроение, 1990. – С. 53-65.
56. Елтышев В.А. Напряженно-деформированное состояние оболочечных конструкций с наполнителем / В.А. Елтышев. – М. : Наука, 1981. – 167 с.
57. Елтышев В.А. Развитие вариационного метода Треффца применительно к решению пространственных задач теории упругости / В.А. Елтышев // Вестник ПГТУ. Динамика и прочность машин / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 2001. – № 3. – С. 56-65.
58. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
59. Зоммерфилд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики / А. Зоммерфилд. – Москва : Наука, 1950. – 456 с.
60. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович. – М. : Наука, 1984. – 752 с.
61. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу Д. Егер. – М. : Наука, 1964. – 488 с.
62. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э.М. Карташов. – М. : Высшая скола, 2001. – 550 с.
63. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М. : Мир, 1969. – 448 с.
64. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1976. – 543 с.
65. Колосов Г.В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексного переменного к теории упругости / Г.В. Колосов. – М., Л.: ОНТИ, 1939. – 224 с.
66. Колчанова Е.А. Об одном методе решения пространственныой задачи теории упругости / Е.А. Колчанова. // Краевые задачи упругих и неупругих систем. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 52-64.
67. Колчанова Е.А. Решение плоской квазистатической задачи термоупругости о вращении трансверсально-изотропного цилиндрического тела сложной формы / Колчанова Е.А. // Напряженно-деформированное состояние и прочность конструкций. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. – С. 83-89.
68. Коренев В.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях / В.Г. Коренев. – М. : Физматгиз, 1960. – 458 с.

69. Корольков И.В. Метод решения краевых задач с границами сложной конфигурации / И.В. Корольков // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1979. – № 11. – С. 22-26.
70. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного анализа / Н.Е.Кочин. – М. : Наука, 1965. – 425 с.
71. Краснов М. OpenGL графика в проектах Delphi / М. Краснов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 352 с.
72. Краснов М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М. : Наука, 1968. – 192 с.
73. Крутков Ю.А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости / Ю.А. Крутков. – М., Л. : Изд-во АН СССР, 1949. – 200 с.
74. Куликовский А.Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.
75. Культин Н.Б. Программирование на Object Pascal в Delphi 5 / Н.Б. Культин. – СПб.; БХВ–Петербург, 1999. – 464 с.
76. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости / В.Д. Купрадзе. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 472с.
77. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Гостехиздат, 1958. – 678 с.
78. Ландау Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука 1965. – 204 с.
79. Левин В.И. Дифференциальные уравнения математической физики / В.И. Левин, Ю.И. Гросберг. – М., Л. : ГТТИ , 1951. – 576 с.
80. Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции и численные методы / Леонтьев В.Л.. – Ульяновск: УлГУ, 2003. – 178 с.
81. Линейные уравнения математической физики / Под редакцией С.Г. Михлина. – М. : Наука, 1964. – 368 с.
82. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М. : Гостехиздат, 1955. – 492 с.
83. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 940 с.
84. Ляв А. Математическая теория упругости / А. Ляв. – М., Л. : издательство НКТП, 1935. – 676 с.
85. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук. – М. : Наука, 1981. – 416 с.
86. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. – М. : Наука, 1989. – 608 с.
87. Миндлин Р. Сосредоточенная сила в упругом полупространстве / Р. Миндлин, Д. Чен // Механика. Сб. сокращ. переводов иностр. периодич. литер. – Москва, 1952. – Вып.4. – с.118-133.
88. Михлин С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин. – М. : Наука, 1968. – 576 с.
89. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. – М. : Высшая школа, 1977. – 432 с.
90. Михлин С.Г. Решение сейсмологических проблем плоской теории упругости и плоской бигармонической проблемы / С.Г. Михлин // Труды Сейсмологического ин-та АН СССР. – 1934. – № 37. – с.11-26.
91. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
92. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и их приложения в математической физике / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1968. – 511 с.

93. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
94. Нейбер Г. Концентрация напряжений / Г. Нейбер. – М. : Гостехиздат, 1947. – 204 с.
95. Немиш Ю.Н. Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела / Ю.Н. Немиш. – Киев: Наукова думка, 1989. – 312 с.
96. Новацкий В. Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – М. : Изд. АН СССР, 1962. – 364 с.
97. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. Де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
98. Папкович П.Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы / П.Ф. Папкович // Доклады АН СССР. – 1940. – Т. 27, № 4. – С. 335-339.
99. Папкович П.Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит / П.Ф. Папкович // Прикл. математика и механика. – 1941. – Т. 5, № 3. – с. 359-374.
100. Партон В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.
101. Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости / П.И. Перлин, В.З. Партон. – М. : Наука, 1977. – 312 с.
102. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
103. Прокопов В.К. Равновесие упругого осесимметрично нагруженного толстостенного цилиндра / В.К. Прокопов // Прикл. математика и механика. – 1949. – Т. 13, № 2. – С.135-144.
104. Прокопов В.К. Однородные решения теории упругости и их приложения в теории тонких пластинок / В.К. Прокопов // Механика твердого тела: Тр. II Всесоюз. съезда по теоретич. и прикл. механике. – 1966. – Т. 3. – С. 253-259.
105. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: граничные задачи статики упругих тел / под ред. Ю.Н. Подильчука – Киев: Наук. думка, 1984. – Т. 1. – 304 с.
106. Рахматулин Х.А. О проблеме теории распространения волн в сплошных средах / Х.А. Рахматулин // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1970. – № 3. – с. 97-106.
107. Рейснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости / Э. Рейснер. – М. : Изд. АН СССР, 1961. – 580 с.
108. Роговой А.А. Математическое обоснование метода законтурных массовых сил в теории упругости / А.А. Роговой // Механика деформируемых тел. Ученые записки Пермского государственного ун-та. – 1974. – Вып.2, № 273. – С. 43-50.
109. Роговой А.А. О решении плоской задачи теории упругости методом источников / А.А. Роговой // Методы решения задач теории упругости и вязкоупругости. – Свердловск: Изд. УНЦ АН СССР, 1974. – С. 3-14.
110. Роговой А.А. О решении осесимметричных задач теории упругости методом источников / А.А. Роговой // Методы решения задач теории упругости и вязкоупругости. – Свердловск: Изд. УНЦ АН СССР, 1974. – С. 15-25.
111. Розин Л.А. Вариационная постановка задач для упругих систем. / Л.А. Розин. – Ленинград: ЛГУ, 1978. – 223 с.
112. Розин Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения / Л.А. Розин. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 1998. – 532 с.
113. Розин Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам / Л.А. Розин. – М. : Стройиздат, 1977. – 129 с.

114. Русаков С.В. Разностные сплайн-схемы для задач тепло- и массопереноса / С.В. Русаков. – Иркутск: Иркутский университет, 1990. – 123 с.
115. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий / Г.Н. Савин. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. – 496 с.
116. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1971. – 552 с.
117. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
118. Слободянский М.Г. Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции / М.Г. Слободянский // Прикл. математика и механика. – 1954. – Т. 18, № 1. – С. 55-74.
119. Слободянский М.Г. Об общих и полных формах решения уравнений упругости / М.Г. Слободянский // Прикл. математика и механика. – 1959. – Т. 23, № 3. – С. 468-482.
120. Соболев С.Л. Уравнения математической физики / С.Л. Соболев, А.Н. Тихонов. – М. : Наука, 1966. – 443 с.
121. Соляник-Красса К.В. Осесимметричная задача теории упругости / К.В. Соляник-Красса. – М. : Стройиздат, 1987. – 368 с.
122. Соляник-Красса К.В. Функции напряжений осесимметричной теории упругости / К.В. Соляник-Красса // Прикл. математика и механика. – 1952. – Т. 21, № 2. – С. 285-286.
123. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под. ред. М. Абрамовица. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
124. Тарантина А.В. Проблемы применения метода фиктивных канонических областей / А.В. Тарантина, Л.Н. Ясницкий // Компьютерное и математическое моделирование в естест-венных и технических науках: материалы IV Всерос. науч. internet-конф. – Тамбов: ИМФИ ТГУ им. Г.Р. Державина, 2002. – Вып.16. – С. 18-21.
125. Тарантина А.В., Ясницкий Л.Н. Влияние расположения особых точек искомого решения на сходимость метода фиктивных канонических областей. Численные иллюстрации / А.В. Тарантина, Л.Н. Ясницкий // Вестник ПГТУ. Динамика и прочность машин. – Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2003. – № 4. – С. 47-55.
126. Тарунин Е.Л. Нелинейные задачи тепловой конвекции / Е.Л. Тарунин. – Пермь: ПГУ, 2002. – 214 с.
127. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко. – М.: Наука 1975. – 576 с.
128. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М. : Наука, 1951. – 451 с.
129. Треффц Е. Математическая теория упругости / Е.Треффц. – М., Л.: ОНТИ, 1934. – 172 с.
130. Угодчиков А.В. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах / А.В. Угодчиков, М.И. Длугач, А.Е. Степанов. – М.: Высшая школа, 1970. – 528 с.
131. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – Т. 1. – 608 с.
132. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – Т. 2. – 800 с.

133. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1966. – Т. 3. – 656 с.
134. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Дж. Форсайт, К. Молер. – М. : Мир, 1969. – 167 с.
135. Цыпкин А.Г. Математические формулы / А.Г. Цыпкин, Г.Г. Цыпкин. – М.: Наука, 1985. –128 с.
136. Чернявский А.О. Метод конечных элементов. Основы практического применения / А.О. Чернявский // Справочник. Инженерный журнал. – Москва, 2003. – № 10, № 11.
137. Шардаков И.Н. Метод геометрического погружения для решения краевых задач теории упругости / И.Н. Шардаков, И.Е. Трояновский, И.Н. Труфанов. – Свердловск : Препринт ИМСС УНЦ АН СССР, 1984. – 66 с.
138. Шардаков И.Н. Метод геометрического погружения в теории упругости / И.Н. Шардаков, Н.А. Труфанов, В.П. Матвеенко. – Екатеринбург: УрОРАН, 1999. – 298 с.
139. Шерман Д.И. Основные плоские и контактные (смешанные) задачи статической теории упругости / Д.И. Шерман // Механика в СССР за тридцать лет. – М., Л.: Наука, 1950. – с.192-225.
140. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление / Л. Эйлер. – М., Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 580 с.
141. Эйлер Л. Интегральное исчисление / Л. Эйлер. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – Т. 1. – 416 с.
142. Эйлер Л. Интегральное исчисление / Л. Эйлер. – М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – Т. 2. – 368 с.
143. Эйлер Л. Интегральное исчисление / Л. Эйлер. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. – Т. 3. – 448 с.
144. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке. – М. : Наука, 1964. – 344 с.
145. Ясницкий Л.Н. Введение в искусственный интеллект: учебное пособие по спецкурсу / Л.Н. Ясницкий. – М. : издательский центр “Академия”, 2005. – 176 с.
146. Ясницкий Л.Н. Метод фиктивных канонических областей в механике сплошных сред / Л.Н. Ясницкий. – М. : Наука, 1992. – 128 с.
147. Ясницкий Л.Н. Об одном способе решения задач теории гармонических функций и линейной теории упругости / Л.Н. Ясницкий // Прочностные и гидравлические характеристики машин и конструкций. – Пермь: Изд. ППИ, 1973. – С. 78-83.
148. Ясницкий Л.Н. Напряженно-деформированное состояние полушарового тела / Л.Н. Ясницкий // Геометрическое моделирование и начертательная геометрия: тезисы докладов Уральской научно-технической конференции. – Пермь: Изд. УрО АН СССР, 1987. – С. 102.
149. Ясницкий Л.Н. О выборе базовых разложений и сходимости метода погружения / Л.Н. Ясницкий // Геометрическое моделирование и начертательная геометрия: тезисы докладов Уральской научно-технической конференции. – Пермь: Изд. УрО АН СССР, 1987. – С. 103-104.
150. Ясницкий Л.Н. Критерий выбора базовых функции при решении задач методом погружения / Л.Н. Ясницкий // Геометрическое моделирование и начертательная геометрия: тезисы докладов Уральской научно-технической конференции. – Пермь: Изд. УрО АН СССР, 1987. – С. 105-107.
151. Ясницкий Л.Н. Аналитический метод решения краевых задач теории упругости для тел сложной конфигурации / Л.Н. Ясницкий // Прочностные и динамические характеристики машин и конструкций. – Пермь: Изд. ППИ, 1988. – С. 16-23.

152. Ясницкий Л.Н. Вычислительные аспекты применения метода фиктивных канонических областей в краевых задачах механики сплошных сред / Л.Н. Ясницкий // Физические проблемы технологии. Вып. А. – Пермь: Пермское книжное издательство, 1989. – С. 64-89.
153. Ясницкий Л.Н. Суперпозиция базисных решений в методах типа Треффца / Л.Н. Ясницкий // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – №2 – С. 95-101.
154. Ясницкий Л.Н. К расчету напряженного состояния эллипсоидальной оболочки постоянной и переменной толщины на основе решений теории упругости для сферических областей / Ясницкий Л.Н. // Прикладная механика. – 1989. – т. 25, № 6 – С. 111-114.
155. Ясницкий Л.Н. О возможности применения метода фиктивных канонических областей для расчета конструкций из композиционных материалов / Л.Н. Ясницкий // Композиционные материалы в конструкциях глубоководных технических средств: тезисы докладов межвузовской научно-технической конференции. – Николаев: Изд. НКИ, 1989. – С. 83-85.
156. Ясницкий Л.Н. Новый метод решения граничных задач механики деформируемого тела / Л.Н. Ясницкий // Смешанные задачи механики деформируемого тела: тезисы 4-й Всесоюзной конференции. – Одесса: Изд. АН СССР, 1989. – Ч.2. – С 146.
157. Ясницкий Л.Н. Композиция расчетной области в методе фиктивных канонических областей / Л.Н. Ясницкий // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 6. – С. 168-172.
158. Ясницкий Л.Н. Возможности и перспективы применения методов искусственного интеллекта в механике сплошных сред / Л.Н. Ясницкий // Вестник ПГТУ. Динамика и прочность машин. – Пермь : Перм. гос. техн. ун-т, 2001. – № 3. – С. 150-164.
159. Ясницкий Л.Н. Принципы построения экспертной системы для аналитического решения краевых задач / Л.Н. Ясницкий // Математика программных систем. Межвузовский сборник научных трудов. – Пермь : издательство ПГУ, 2001. – С. 105-114.
160. Ясницкий Л.Н. Искусственный интеллект и новые возможности компьютерного моделирования / Л.Н. Ясницкий // Вестник Пермского университета. Информационные системы и технологии. – Пермь : из-во Пермского государственного университета, 2006. – № 4. – С. 81-86.
161. Boundary element method XVI / Editor C. A. Brebbia. – Southampton, Boston : Computational Mechanics Publications, 1994. – 602 p.
162. Boussinesq M.J. Application des potentials a l`etude de lequolibre et du movement des solides elastiques / M.J. Boussinesq. – Paris: Gauthiers – Villars, 1885. – 280 p.
163. Brebbia C.A. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering / C.A. Brebbia [et. al]. – Boston : Springer-Verlag, 1984. – 510 p.
164. Kelvin W. Treatise on natural philosophy / W. Kelvin, P.G. Tait. – Cambridge: Univ. press, 1879. – 328 p.
165. Schiff P.A. Sur l`equilibre d`un cylinre elastique / P.A. Schiff // J. Math. Pures et appl. Ser. 3. – 1883. – V.9. – № 6. – p. 407-421.

Приложение 1. Общие решения двумерных стационарных задач теплопроводности

В данном приложении приведены выражения операторов Лапласа и общие решения соответствующих уравнений для плоских задач теплопроводности в цилиндрической и декартовой системах координат (СК) и для осесимметричных задач в цилиндрической и сферической СК.

Плоская стационарная задача теплопроводности в декартовой СК

В декартовой системе координат (x, y, z) для плоской задачи (уравнение плоскости $z = 0$) оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде [62]:

$$T = T_{00} + T_{10} + T_{20} + T_{30} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{1n} + T_{2n} + T_{3n} + T_{4n}\right),$$

$$T_{00} = A_{00},$$

$$T_{10} = A_{10}x,$$

$$T_{20} = A_{20}y,$$

$$T_{30} = A_{30}x\,y,$$

$$T_{1n} = A_{1n}\sin(a_n x)\,sinh(a_n y),$$

$$T_{2n} = A_{2n}\cos(a_n x)\,sinh(a_n y),$$

$$T_{3n} = A_{3n}\sin(a_n x)\,cosh(a_n y),$$

$$T_{4n} = A_{4n}\cos(a_n x)\,cosh(a_n y),$$

где $a_n = \dfrac{n\pi}{L}$, L – половина периода изменения температуры вдоль оси x.

Градиент температуры вычисляется по формуле

$$grad(T) = \left\{\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial T}{\partial y}\right\}.$$

Вычислим градиент для каждого из слагаемых:

$$grad(T_{00}) = \{0;\quad 0\},$$

$$grad(T_{10}) = \{A_{10};\quad 0\},$$

$$grad(T_{20}) = \{0;\quad A_{20}\},$$

$$grad(T_{30}) = \{A_{30}\,y;\quad A_{30}\,x\},$$

$$grad(T_{1n}) = \{A_{1n}a_n\cos(a_n x)\,sinh(a_n y);\quad A_{1n}a_n\sin(a_n x)\,cosh(a_n y)\},$$

$$grad(T_{2n}) = \{-A_{2n}a_n\sin(a_n x)\,sinh(a_n y);\quad A_{2n}a_n\cos(a_n x)\,cosh(a_n y)\},$$

$$grad(T_{3n}) = \{A_{3n}a_n\cos(a_n x)\,cosh(a_n y);\quad A_{3n}a_n\sin(a_n x)\,sinh(a_n y)\},$$

$$grad(T_{4n}) = \{-A_{4n}a_n\sin(a_n x)\,cosh(a_n y);\quad A_{4n}a_n\cos(a_n x)\,sinh(a_n y)\}.$$

Плоская стационарная задача теплопроводности в цилиндрической СК

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) для плоской задачи (уравнение плоскости $z = 0$) оператор Лапласа имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде [62]:

$$T = T_{00} + T_{10} + \sum_{m=1}^{4} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn},$$

$$T_{00} = A_{00},$$

$$T_{10} = A_{10}\ln(r),$$

$$T_{1n} = A_{1n}\sin(n\varphi)\, r^{n},$$

$$T_{2n} = A_{2n}\cos(n\varphi)\, r^{n},$$

$$T_{3n} = A_{3n}\sin(n\varphi)\, r^{-n},$$

$$T_{4n} = A_{4n}\cos(n\varphi)\, r^{-n}.$$

Градиент температуры вычисляется по формуле

$$grad(T) = \left\{\frac{\partial T}{\partial r};\quad \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right\}.$$

Вычислим градиент для каждого из слагаемых:

$$grad(T_{00}) = \{0;\quad 0\},$$

$$grad(T_{10}) = \left\{\frac{A_{10}}{r};\quad 0\right\},$$

$$grad(T_{1n}) = \left\{A_{1n}\, n\sin(n\varphi)\, r^{n-1};\quad A_{1n}\, n\cos(n\varphi)\, r^{n-1}\right\},$$

$$grad(T_{2n}) = \left\{A_{2n}\, n\cos(n\varphi)\, r^{n-1};\quad -A_{2n}\, n\sin(n\varphi)\, r^{n-1}\right\},$$

$$grad(T_{3n}) = \left\{-A_{3n}\, n\sin(n\varphi)\, r^{-n-1};\quad A_{3n}\, n\cos(n\varphi)\, r^{-n-1}\right\},$$

$$grad(T_{4n}) = \left\{-A_{4n}\, n\cos(n\varphi)\, r^{-n-1};\quad -A_{4n}\, n\sin(n\varphi)\, r^{-n-1}\right\}.$$

Осесимметричная стационарная задача теплопроводности в цилиндрической СК

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) для осесимметричной задачи (ось симметрии – ось z) оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде [121]:

$$T = T_{00} + T_{10} + T_{20} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{1n} + T_{2n} + T_{3n} + T_{4n} + T_{5n} + T_{6n} + T_{7n} + T_{8n}\right),$$

$$T_{00} = A_{00},$$

$$T_{10} = A_{10}\ln(r),$$

$$T_{2\,0} = A_{2\,0}\, z\,,$$
$$T_{1\,n} = A_{1\,n} \sin(\beta_n\, z) I_0(\beta_n\, r),$$
$$T_{2\,n} = A_{2\,n} \cos(\beta_n\, z) I_0(\beta_n\, r),$$
$$T_{3\,n} = A_{3\,n} \sin(\beta_n\, z) K_0(\beta_n\, r),$$
$$T_{4\,n} = A_{4\,n} \cos(\beta_n\, z) K_0(\beta_n\, r),$$
$$T_{5\,n} = A_{5\,n} \sinh(\beta_n\, z) J_0(\beta_n\, r),$$
$$T_{6\,n} = A_{6\,n} \cosh(\beta_n\, z) J_0(\beta_n\, r),$$
$$T_{7\,n} = A_{7\,n} \sinh(\beta_n\, z) Y_0(\beta_n\, r),$$
$$T_{8\,n} = A_{8\,n} \cosh(\beta_n\, z) Y_0(\beta_n\, r),$$

где $\beta_n = \dfrac{n\pi}{L}$, L – половина периода изменения температуры вдоль оси симметрии, $I_0,\ J_0,\ K_0,\ Y_0$ – функции Бесселя [123].

Градиент температуры вычисляется по формуле

$$grad(T) = \left\{ \frac{\partial T}{\partial r};\quad \frac{\partial T}{\partial z} \right\}.$$

Вычислим градиент для каждого из слагаемых:

$$grad(T_{0\,0}) = \{0;\quad 0\},$$
$$grad(T_{1\,0}) = \left\{ \frac{A_{1\,0}}{r};\quad 0 \right\},$$
$$grad(T_{2\,0}) = \{0;\quad A_{2\,0}\},$$
$$grad(T_{1\,n}) = \{A_{1n}\,\beta_n\, \sin(\beta_n\, z)\, I_1(\beta_n\, r);\quad A_{1n}\,\beta_n\, \cos(\beta_n\, z)\, I_0(\beta_n\, r)\},$$
$$grad(T_{2\,n}) = \{A_{2n}\,\beta_n\, \cos(\beta_n\, z)\, I_1(\beta_n\, r);\quad -A_{2n}\,\beta_n\, \sin(\beta_n\, z)\, I_0(\beta_n\, r)\},$$
$$grad(T_{3\,n}) = \{-A_{3n}\,\beta_n\, \sin(\beta_n\, z)\, K_1(\beta_n\, r);\quad A_{3n}\,\beta_n\, \cos(\beta_n\, z)\, K_0(\beta_n\, r)\},$$
$$grad(T_{4\,n}) = \{-A_{4n}\,\beta_n\, \cos(\beta_n\, z)\, K_1(\beta_n\, r);\quad -A_{4n}\,\beta_n\, \sin(\beta_n\, z)\, K_0(\beta_n\, r)\},$$
$$grad(T_{5\,n}) = \{-A_{5n}\,\beta_n\, \sinh(\beta_n\, z)\, J_1(\beta_n\, r);\quad A_{5n}\,\beta_n\, \cosh(\beta_n\, z)\, J_0(\beta_n\, r)\},$$
$$grad(T_{6\,n}) = \{-A_{6n}\,\beta_n\, \cosh(\beta_n\, z)\, J_1(\beta_n\, r);\quad A_{6n}\,\beta_n\, \sinh(\beta_n\, z) J_0(\beta_n\, r)\}$$
$$grad(T_{7\,n}) = \{-A_{7n}\,\beta_n\, \sinh(\beta_n\, z) Y_1(\beta_n\, r);\quad A_{7n}\,\beta_n\, \cosh(\beta_n\, z) Y_0(\beta_n\, r)\},$$
$$grad(T_{8\,n}) = \{-A_{8n}\,\beta_n\, \cosh(\beta_n\, z) Y_1(\beta_n\, r);\quad A_{8n}\,\beta_n\, \sinh(\beta_n\, z) Y_0(\beta_n\, r)\},$$

где I_1, K_1, J_1, Y_1 – функции Бесселя [123].

Осесимметричная стационарная задача теплопроводности в сферической СК

В сферической системе координат (r,ϕ,θ) для осесимметричной задачи (ось симметрии $\varphi = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$) оператор Лапласа имеет следующий вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right)}{\sin(\theta) r^2}.$$

Общее решение уравнения Лапласа можно записать в виде [62]:

$$T = T_{0\,0} + T_{10} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{1\,n} + T_{2\,n}\right),$$

$$T_{0\,0} = A_{0\,0},$$

$$T_{1\,0} = \frac{A_{1\,0}}{r},$$

$$T_{1\,n} = A_{1\,n} P_n(\chi) r^n,$$

$$T_{2\,n} = A_{2\,n} P_n(\chi) r^{-n-1},$$

где $\chi = \cos(\theta)$, $n = \overline{1..\infty}$, P_n – полиномы Лежандра.

Градиент температуры вычисляется по формуле

$$grad(T) = \left\{\frac{\partial T}{\partial r};\quad \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\right\}.$$

Вычислим градиент для каждого из слагаемых:

$$grad\left(T_{0\,0}\right) = \{0;\quad 0\},$$

$$grad\left(T_{1\,0}\right) = \left\{-\frac{A_{1\,0}}{r^2};\quad 0\right\},$$

$$grad\left(T_{1\,n}\right) = \left\{A_{1n}\, n P_n(\chi)\, r^{n-1};\quad -A_{1n}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(P_n(\chi)\right)\sin(\theta)\, r^{n-1}\right\},$$

$$grad\left(T_{2\,n}\right) = \left\{A_{2n}(-n-1) P_n(\chi)\, r^{-n-2};\quad -A_{2n}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(P_n(\chi)\right)\sin(\theta)\, r^{-n-2}\right\}.$$

Приложение 2. Общее решение плоской статической задачи линейной теории упругости в декартовой СК

В данном приложении приведены уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения плоской статической задачи линейной теории упругости в декартовой СК (x, y, z) (уравнение плоскости $z = 0$), а так же соответствующее общее решение. Рассматриваются два основных вида плоских задач – плосконапряженное и плоскодеформированное состояния (ПНС и ПДС).

Примем следующие обозначения основных переменных:

U_x, U_y – компоненты вектора перемещений;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}$ – компоненты тензора деформаций.

По [127] уравнения равновесия в напряжениях в проекциях на оси координат имеют следующий вид для ПНС и ПДС

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{xy}) + F_x = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y) + F_y = 0.$$

где F_x и F_y – массовые силы в направлениях x и y соответственно.

Геометрические соотношения записываются в следующем виде

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial y},$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right).$$

Или наоборот

$$U_x = \int \varepsilon_x \, dx + f_x(y),$$

$$U_y = \int \varepsilon_y \, dy + f_y(x),$$

где функции $f_x(y)$ и $f_y(x)$ могут быть получены, используя уравнение совместности, которое для плоской задачи для компонент тензора деформаций имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varepsilon_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varepsilon_x) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\varepsilon_{xy}) = 0.$$

Физические соотношения (обобщенный закон Гука) для ПНС и ПДС различны. Для ПНС

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)}{1-\nu^2},$$

$$\sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)}{1-\nu^2},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu}.$$

Для ПДС

$$\sigma_x = \frac{E\left((1+\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$
$$\sigma_y = \frac{E\left((1+\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$
$$\sigma_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu},$$
$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right),$$
где E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Общее решение однородных уравнений равновесия в напряжениях может быть получено с использованием функции напряжений Эри [127], которая должна удовлетворять бигармоническому уравнению
$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0.$$
Напряжения выражаются через функцию Эри по формулам
$$\sigma_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Phi),$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi),$$
$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\Phi).$$
В [127] даны выражения для функции Эри, по которым получены следующие выражения для напряжений
$$\sigma_{x00} = 0,\ \sigma_{x10} = 0,\ \sigma_{x20} = A_{20},\ \sigma_{x30} = 0,\ \sigma_{x40} = 0,$$
$$\sigma_{x50} = A_{50}\,x,\ \sigma_{x60} = A_{60}\,y,\ \sigma_{x70} = 0,\ \sigma_{x80} = 0,$$
$$\sigma_{y00} = A_{00},\ \sigma_{y10} = 0,\ \sigma_{y20} = 0,\ \sigma_{y30} = A_{30}\,x,\ \sigma_{y40} = A_{40}\,y,$$
$$\sigma_{y50} = 0,\ \sigma_{y60} = 0,\ \sigma_{y70} = 0,\ \sigma_{y80} = 0,$$
$$\sigma_{xy00} = 0,\ \sigma_{xy10} = -A_{10},\ \sigma_{xy20} = 0,\ \sigma_{xy30} = 0,\ \sigma_{xy40} = -A_{40}\,x,$$
$$\sigma_{xy50} = -A_{50}\,y,\ \sigma_{xy60} = 0,\ \sigma_{xy70} = 0,\ \sigma_{xy80} = 0,$$
$$\sigma_{x1n} = A_{1n}\,a_n^2 \sin(a_n\,x)\cosh(a_n\,y),$$
$$\sigma_{x2n} = A_{2n}\,a_n^2 \sin(a_n\,x)\sinh(a_n\,y),$$
$$\sigma_{x3n} = A_{3n}\,a_n \sin(a_n\,x)\left(2\sinh(a_n\,y) + a_n\,y\cosh(a_n\,y)\right),$$
$$\sigma_{x4n} = A_{4n}\,a_n \sin(a_n\,x)\left(2\cosh(a_n\,y) + a_n\,y\sinh(a_n\,y)\right),$$
$$\sigma_{x5n} = A_{5n}\,a_n^2 \cos(a_n\,x)\cosh(a_n\,y),$$
$$\sigma_{x6n} = A_{6n}\,a_n^2 \cos(a_n\,x)\sinh(a_n\,y),$$
$$\sigma_{x7n} = A_{7n}\,a_n \cos(a_n\,x)\left(2\sinh(a_n\,y) + a_n\,y\cosh(a_n\,y)\right),$$
$$\sigma_{x8n} = A_{8n}\,a_n \cos(a_n\,x)\left(2\cosh(a_n\,y) + a_n\,y\sinh(a_n\,y)\right),$$
$$\sigma_{y1n} = -A_{1n}\,a_n^2 \sin(a_n\,x)\cosh(a_n\,y),$$
$$\sigma_{y2n} = -A_{2n}\,a_n^2 \sin(a_n\,x)\sinh(a_n\,y),$$
$$\sigma_{y3n} = -A_{3n}\,a_n^2\,y \sin(a_n\,x)\cosh(a_n\,y),$$
$$\sigma_{y4n} = -A_{4n}\,a_n^2\,y \sin(a_n\,x)\sinh(a_n\,y),$$

$$\sigma_{y5n} = -A_{5n}\, a_n^2 \cos(a_n\, x)\cosh(a_n\, y),$$
$$\sigma_{y6n} = -A_{6n}\, a_n^2 \cos(a_n\, x)\sinh(a_n\, y),$$
$$\sigma_{y7n} = -A_{7n}\, a_n^2\, y\cos(a_n\, x)\cosh(a_n\, y),$$
$$\sigma_{y8n} = -A_{8n}\, a_n^2\, y\cos(a_n\, x)\sinh(a_n\, y),$$
$$\sigma_{xy1n} = -A_{1n}\, a_n^2 \cos(a_n\, x)\sinh(a_n\, y),$$
$$\sigma_{xy2n} = -A_{2n}\, a_n^2 \cos(a_n\, x)\cosh(a_n\, y),$$
$$\sigma_{xy3n} = -A_{3n}\, a_n \cos(a_n\, x)(\cosh(a_n\, y) + a_n\, y\sinh(a_n\, y)),$$
$$\sigma_{xy4n} = -A_{4n}\, a_n \cos(a_n\, x)(\sinh(a_n\, y) + a_n\, y\cosh(a_n\, y)),$$
$$\sigma_{xy5n} = A_{5n}\, a_n^2 \sin(a_n\, x)\sinh(a_n\, y),$$
$$\sigma_{xy6n} = A_{6n}\, a_n^2 \sin(a_n\, x)\cosh(a_n\, y),$$
$$\sigma_{xy7n} = A_{7n}\, a_n \sin(a_n\, x)(\cosh(a_n\, y) + a_n\, y\sinh(a_n\, y)),$$
$$\sigma_{xy8n} = A_{8n}\, a_n \sin(a_n\, x)(\sinh(a_n\, y) + a_n\, y\cosh(a_n\, y)),$$

где $a_n = \dfrac{n\pi}{L}$, L – половина периода изменения НДС вдоль оси x, $n = \overline{2, \infty}$.

Выражения для перемещений получены, используя физические и геометрические соотношения.

Для ПНС

$$U_{x00} = -\frac{\nu A_{00}\, x}{E},$$
$$U_{x10} = -\frac{(1+\nu)A_{10}\, y}{E},$$
$$U_{x20} = \frac{A_{20}\, x}{E},$$
$$U_{x30} = -\frac{1}{2}\frac{A_{30}\left(\nu x^2 + y^2\right)}{E},$$
$$U_{x40} = -\frac{\nu A_{40}\, x\, y}{E},$$
$$U_{x50} = \frac{1}{2}\frac{A_{50}\left(x^2 - (2+\nu)y^2\right)}{E},$$
$$U_{x60} = \frac{\nu A_{60}\, x\, y}{E},$$
$$U_{x70} = \frac{A_{70}}{E},$$
$$U_{x80} = 0,$$
$$U_{y00} = \frac{A_{00}\, y}{E},$$
$$U_{y10} = -\frac{(1+\nu)A_{10}\, x}{E},$$
$$U_{y20} = -\frac{\nu\, A_{20}\, y}{E},$$
$$U_{y30} = \frac{A_{30}\, x\, y}{E},$$

$$U_{y40} = \frac{1}{2}\frac{A_{40}\left(y^2 - (2+\nu)x^2\right)}{E},$$

$$U_{y50} = -\frac{\nu A_{50}\, x\, y}{E},$$

$$U_{y60} = -\frac{1}{2}\frac{A_{60}\left(x^2 + \nu y^2\right)}{E},$$

$$U_{y70} = 0,$$

$$U_{y80} = \frac{A_{80}}{E},$$

$$U_{x1n} = -\frac{A_{1n}\, a_n (1+\nu)}{E}\cos(a_n x)\cosh(a_n y),$$

$$U_{x2n} = -\frac{A_{2n}\, a_n (1+\nu)}{E}\cos(a_n x)\sinh(a_n y),$$

$$U_{x3n} = -\frac{A_{3n}}{E}\cos(a_n x)\left(2\sinh(a_n y) + (1+\nu)a_n y\cosh(a_n y)\right),$$

$$U_{x4n} = -\frac{A_{4n}}{E}\cos(a_n x)\left(2\cosh(a_n y) + (1+\nu)a_n y\sinh(a_n y)\right),$$

$$U_{x5n} = \frac{A_{5n}\, a_n (1+\nu)}{E}\sin(a_n x)\cosh(a_n y),$$

$$U_{x6n} = \frac{A_{6n}\, a_n (1+\nu)}{E}\sin(a_n x)\sinh(a_n y),$$

$$U_{x7n} = \frac{A_{7n}}{E}\sin(a_n x)\left(2\sinh(a_n y) + (1+\nu)a_n y\cosh(a_n y)\right),$$

$$U_{x8n} = \frac{A_{8n}}{E}\sin(a_n x)\left(2\cosh(a_n y) + (1+\nu)a_n y\sinh(a_n y)\right),$$

$$U_{y1n} = -\frac{A_{1n}\, a_n (1+\nu)}{E}\sin(a_n x)\sinh(a_n y),$$

$$U_{y2n} = -\frac{A_{2n}\, a_n (1+\nu)}{E}\sin(a_n x)\cosh(a_n y),$$

$$U_{y3n} = -\frac{A_{3n}}{E}\sin(a_n x)\left((-1+\nu)\cosh(a_n y) + (1+\nu)a_n y\sinh(a_n y)\right),$$

$$U_{y4n} = -\frac{A_{4n}}{E}\sin(a_n x)\left((-1+\nu)\sinh(a_n y) + (1+\nu)a_n y\cosh(a_n y)\right),$$

$$U_{y5n} = -\frac{A_{5n}\, a_n (1+\nu)}{E}\cos(a_n x)\sinh(a_n y),$$

$$U_{y6n} = -\frac{A_{6n}\, a_n (1+\nu)}{E}\cos(a_n x)\cosh(a_n y),$$

$$U_{y7n} = -\frac{A_{7n}}{E}\cos(a_n x)\left((-1+\nu)\cosh(a_n y) + (1+\nu)a_n y\sinh(a_n y)\right),$$

$$U_{y8n} = -\frac{A_{8n}}{E}\cos(a_n x)\left((-1+\nu)\sinh(a_n y) + (1+\nu)a_n y\cosh(a_n y)\right).$$

Для ПДС

$$U_{x00}=-\frac{\nu(1+\nu)A_{00}\,x}{E},$$
$$U_{x10}=-\frac{(1+\nu)A_{10}\,y}{E},$$
$$U_{x20}=\frac{(1+\nu)(1-\nu)\,A_{20}\,x}{E},$$
$$U_{x30}=-\frac{1}{2}\frac{A_{30}\,(1+\nu)\left(\nu\,x^2+(1-\nu)y^2\right)}{E},$$
$$U_{x40}=-\frac{\nu(1+\nu)A_{40}\,x\,y}{E},$$
$$U_{x50}=\frac{1}{2}\frac{A_{50}\,(1+\nu)\left((1-\nu)\,x^2-(2-\nu)y^2\right)}{E},$$
$$U_{x60}=\frac{(1+\nu)(1-\nu)A_{60}\,x\,y}{E},$$
$$U_{x70}=\frac{A_{70}}{E},$$
$$U_{x80}=0,$$
$$U_{y00}=\frac{(1+\nu)(1-\nu)A_{00}\,y}{E},$$
$$U_{y10}=-\frac{(1+\nu)A_{10}\,x}{E},$$
$$U_{y20}=-\frac{\nu\,(1+\nu)A_{20}\,y}{E},$$
$$U_{y30}=\frac{(1+\nu)(1-\nu)A_{30}\,x\,y}{E},$$
$$U_{y40}=\frac{1}{2}\frac{(1+\nu)A_{40}\left((1-\nu)y^2-(2-\nu)x^2\right)}{E},$$
$$U_{y50}=-\frac{\nu(1+\nu)A_{50}\,x\,y}{E},$$
$$U_{y60}=-\frac{1}{2}\frac{A_{60}\,(1+\nu)\left((1-\nu)\,x^2+\nu\,y^2\right)}{E},$$
$$U_{y70}=0,$$
$$U_{y80}=\frac{A_{80}}{E},$$

$$U_{x1n}=-\frac{A_{1n}\,a_n\,(1+\nu)}{E}\cos(a_n\,x)\cosh(a_n\,y),$$
$$U_{x2n}=-\frac{A_{2n}\,a_n\,(1+\nu)}{E}\cos(a_n\,x)\sinh(a_n\,y),$$
$$U_{x3n}=-\frac{(1+\nu)A_{3n}}{E}\cos(a_n\,x)\left(2(1-\nu)\sinh(a_n\,y)+a_n\,y\cosh(a_n\,y)\right),$$
$$U_{x4n}=-\frac{(1+\nu)A_{4n}}{E}\cos(a_n\,x)\left(2(1-\nu)\cosh(a_n\,y)+a_n\,y\sinh(a_n\,y)\right),$$

$$U_{x5n} = \frac{A_{5n}\, a_n\, (1+\nu)}{E} \sin(a_n\, x) \cosh(a_n\, y),$$

$$U_{x6n} = \frac{A_{6n}\, a_n\, (1+\nu)}{E} \sin(a_n\, x) \sinh(a_n\, y),$$

$$U_{x7n} = \frac{(1+\nu) A_{7n}}{E} \sin(a_n\, x)(2(1-\nu)\sinh(a_n\, y) + a_n\, y \cosh(a_n\, y)),$$

$$U_{x8n} = \frac{(1+\nu) A_{8n}}{E} \sin(a_n\, x)(2(1-\nu)\cosh(a_n\, y) + a_n\, y \sinh(a_n\, y)),$$

$$U_{y1n} = -\frac{A_{1n}\, a_n\, (1+\nu)}{E} \sin(a_n\, x) \sinh(a_n\, y),$$

$$U_{y2n} = -\frac{A_{2n}\, a_n\, (1+\nu)}{E} \sin(a_n\, x) \cosh(a_n\, y),$$

$$U_{y3n} = -\frac{(1+\nu) A_{3n}}{E} \sin(a_n\, x)((2\nu-1)\cosh(a_n\, y) + a_n\, y \sinh(a_n\, y)),$$

$$U_{y4n} = -\frac{(1+\nu) A_{4n}}{E} \sin(a_n\, x)((2\nu-1)\sinh(a_n\, y) + a_n\, y \cosh(a_n\, y)),$$

$$U_{y5n} = -\frac{A_{5n}\, a_n\, (1+\nu)}{E} \cos(a_n\, x) \sinh(a_n\, y),$$

$$U_{y6n} = -\frac{A_{6n}\, a_n\, (1+\nu)}{E} \cos(a_n\, x) \cosh(a_n\, y),$$

$$U_{y7n} = -\frac{(1+\nu) A_{7n}}{E} \cos(a_n\, x)((2\nu-1)\cosh(a_n\, y) + a_n\, y \sinh(a_n\, y)),$$

$$U_{y8n} = -\frac{(1+\nu) A_{8n}}{E} \cos(a_n\, x)((2\nu-1)\sinh(a_n\, y) + a_n\, y \cosh(a_n\, y)).$$

Приложение 3. Общее решение плоской статической задачи линейной теории упругости в цилиндрической СК

В данном приложении приведены уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения плоской статической задачи линейной теории упругости в цилиндрической СК (r,φ,z) (уравнение плоскости $z=0$), а так же соответствующее общее решение. Рассматриваются два основных вида плоских задач – плосконапряженное и плоскодеформированное состояния (ПНС и ПДС).

Примем следующие обозначения основных переменных:

U_r, U_φ – компоненты вектора перемещений;

$\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \sigma_{r\varphi}$– компоненты тензора напряжений;

$\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$ – компоненты тензора деформаций.

По [127] уравнения равновесия в напряжениях в проекциях на оси координат имеют следующий вид для ПНС и ПДС

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sigma_{r\varphi})+\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}+F_r=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{r\varphi})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sigma_\varphi)+\frac{2\sigma_{r\varphi}}{r}+F_\varphi=0,$$

где F_r и F_φ – массовые силы в направлениях r и φ соответственно.

Геометрические соотношения записываются в следующем виде

$$\varepsilon_r=\frac{\partial U_r}{\partial r},$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{U_r}{r}+\frac{\frac{\partial U_\varphi}{\partial\varphi}}{r},$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial U_r}{\partial\varphi}}{r}+\frac{\partial U_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial U_\varphi}{r}\right).$$

Физические соотношения (обобщенный закон Гука) аналогичны соотношениям в декартовой СК при соответствующей замене индексов.

Для ПНС

$$\sigma_r=\frac{E(\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\varphi)}{1-\nu^2},$$

$$\sigma_\varphi=\frac{E(\varepsilon_\varphi+\nu\varepsilon_r)}{1-\nu^2},$$

$$\sigma_{r\varphi}=\frac{E\varepsilon_{r\varphi}}{1+\nu}.$$

Для ПДС

$$\sigma_r=\frac{E((1+\nu)\varepsilon_r+\nu\varepsilon_\varphi)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E\left((1+\nu)\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{E\varepsilon_{r\varphi}}{1+\nu}.$$

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_r + \sigma_\varphi\right).$$

Общее решение однородных уравнений равновесия в напряжениях может быть получено с использованием функции напряжений Эри [127], которая должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0.$$

Напряжения выражаются через функцию Эри по формулам

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2},$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi\,\partial r}.$$

В [127] даны выражения для функции Эри, по которым получены выражения для напряжений. Формулы для перемещений получены, используя физические и геометрические соотношения.

Для ПНС и ПДС справедливы следующие формулы

$$\sigma_{r00} = \frac{A_{00}}{r^2},$$

$$\sigma_{r10} = 2A_{10},$$

$$\sigma_{r20} = 0,$$

$$\sigma_{r30} = 2A_{30}\,r\cos(\varphi),$$

$$\sigma_{r40} = -2\frac{A_{40}\cos(\varphi)}{r^3},$$

$$\sigma_{r50} = 2A_{50}\,r\sin(\varphi),$$

$$\sigma_{r60} = -2\frac{A_{60}\sin(\varphi)}{r^3},$$

$$\sigma_{r90} = 0,$$

$$\sigma_{r100} = 0,$$

$$\sigma_{r110} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi00} = -\frac{A_{00}}{r^2},$$

$$\sigma_{\varphi10} = 2A_{10},$$

$$\sigma_{\varphi20} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi30} = 6A_{30}\,r\cos(\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi40} = 2\frac{A_{40}\cos(\varphi)}{r^3},$$

$$\sigma_{\varphi50} = 6A_{50}\,r\sin(\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi 60} = 2\frac{A_{60}\sin(\varphi)}{r^3},$$
$$\sigma_{\varphi 90} = 0,$$
$$\sigma_{\varphi 100} = 0,$$
$$\sigma_{\varphi 110} = 0,$$
$$\sigma_{r\varphi 00} = 0,$$
$$\sigma_{r\varphi 10} = 0,$$
$$\sigma_{r\varphi 20} = \frac{A_{20}}{r^2},$$
$$\sigma_{r\varphi 30} = 2A_{30}\, r\sin(\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 40} = -2\frac{A_{40}\sin(\varphi)}{r^3},$$
$$\sigma_{r\varphi 50} = -2A_{50}\, r\cos(\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 60} = 2\frac{A_{60}\cos(\varphi)}{r^3},$$
$$\sigma_{r\varphi 90} = 0,$$
$$\sigma_{r\varphi 100} = 0,$$
$$\sigma_{r\varphi 110} = 0,$$
$$U_{r90} = 0,$$
$$U_{r100} = -\frac{A_{100}\cos(\varphi)}{E},$$
$$U_{r110} = -\frac{A_{110}\sin(\varphi)}{E},$$
$$U_{\varphi 90} = \frac{A_{90}}{E},$$
$$U_{\varphi 100} = \frac{A_{100}\sin(\varphi)}{E},$$
$$U_{\varphi 110} = -\frac{A_{110}\cos(\varphi)}{E},$$
$$\sigma_{r1n} = -A_{1n}\, n(n-1)r^{n-2}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{r2n} = -A_{2n}\,(n+1)(n-2)r^{n}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{r3n} = -A_{3n}\, n(n+1)r^{-n-2}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{r4n} = -A_{4n}\,(n-1)(n+2)r^{-n}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{r5n} = -A_{5n}\, n(n-1)r^{n-2}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{r6n} = -A_{6n}\,(n+1)(n-2)r^{n}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{r7n} = -A_{7n}\, n(n+1)r^{-n-2}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{r8n} = -A_{8n}\,(n-1)(n+2)r^{-n}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 1n} = A_{1n}\, n(n-1)r^{n-2}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 2n} = A_{2n}\,(n+1)(n+2)r^{n}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 3n} = A_{3n}\, n(n+1)r^{-n-2}\cos(n\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi 4n} = A_{4n}(n-1)(n-2)r^{-n}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 5n} = A_{5n}\, n(n-1)r^{n-2}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 6n} = A_{6n}(n+1)(n+2)r^{n}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 7n} = A_{7n}\, n(n+1)r^{-n-2}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 8n} = A_{8n}(n-1)(n-2)r^{-n}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 1n} = A_{1n}\, n(n-1)r^{n-2}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 2n} = A_{2n}\, n(n+1)r^{n}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 3n} = -A_{3n}\, n(n+1)r^{-n-2}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 4n} = -A_{4n}\, n(n-1)r^{-n}\sin(n\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 5n} = -A_{5n}\, n(n-1)r^{n-2}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 6n} = -A_{6n}\, n(n+1)r^{n}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 7n} = A_{7n}\, n(n+1)r^{-n-2}\cos(n\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 8n} = A_{8n}\, n(n-1)r^{-n}\cos(n\varphi),$$
$$U_{r1n} = -\frac{A_{1n}\, n(1+\nu)}{E} r^{n-1}\cos(n\varphi),$$
$$U_{r3n} = \frac{A_{3n}\, n(1+\nu)}{E} r^{-n-1}\cos(n\varphi),$$
$$U_{r5n} = -\frac{A_{5n}\, n(1+\nu)}{E} r^{n-1}\sin(n\varphi),$$
$$U_{r7n} = \frac{A_{7n}\, n(1+\nu)}{E} r^{-n-1}\sin(n\varphi),$$
$$U_{\varphi 1n} = \frac{A_{1n}\, n(1+\nu)}{E} r^{n-1}\sin(n\varphi),$$
$$U_{\varphi 3n} = \frac{A_{3n}\, n(1+\nu)}{E} r^{-n-1}\sin(n\varphi),$$
$$U_{\varphi 5n} = -\frac{A_{5n}\, n(1+\nu)}{E} r^{n-1}\cos(n\varphi),$$
$$U_{\varphi 7n} = -\frac{A_{7n}\, n(1+\nu)}{E} r^{-n-1}\cos(n\varphi),$$

где $n = \overline{2, \infty}$.

Остальные выражения различны для ПНС и ПДС.

Для ПНС

$$U_{r00} = -\frac{A_{00}(1+\nu)}{E\,r},$$
$$U_{r10} = 2\frac{A_{10}(1-\nu)r}{E},$$
$$U_{r20} = 0,$$
$$U_{r30} = \frac{A_{30}(1-3\nu)}{E} r^{2}\cos(\varphi),$$
$$U_{r40} = \frac{A_{40}(1+\nu)}{E\,r^{2}}\cos(\varphi),$$

$$U_{r50} = \frac{A_{50}\left(1-3\,\nu\right)}{E} r^2 \sin(\varphi),$$

$$U_{r60} = \frac{A_{60}\left(1+\nu\right)}{E\,r^2} \sin(\varphi),$$

$$U_{\varphi\,00} = 0\,,$$

$$U_{\varphi\,10} = 0\,,$$

$$U_{\varphi\,20} = -\frac{A_{20}\left(1+\nu\right)}{E\,r}\,,$$

$$U_{\varphi\,30} = \frac{A_{30}\left(5+\nu\right)}{E} r^2 \sin(\varphi),$$

$$U_{\varphi\,40} = \frac{A_{40}\left(1+\nu\right)}{E\,r^2} \sin(\varphi),$$

$$U_{\varphi\,50} = -\frac{A_{50}\left(5+\nu\right)}{E} r^2 \cos(\varphi),$$

$$U_{\varphi\,60} = -\frac{A_{60}\left(1+\nu\right)}{E\,r^2} \cos(\varphi),$$

$$\sigma_{r70} = \frac{1}{4}\frac{A_{70}\left(3+\nu\right)\cos(\varphi)}{r}\,,$$

$$\sigma_{\varphi\,70} = \frac{1}{4}\frac{A_{70}\left(-1+\nu\right)\cos(\varphi)}{r}\,,$$

$$\sigma_{r\varphi70} = \frac{1}{4}\frac{A_{70}\left(-1+\nu\right)\sin(\varphi)}{r}\,,$$

$$U_{r70} = \frac{1}{4}\frac{A_{70}\left(1+\nu\right)\left(3-\nu\right)}{E} \ln(r)\cos(\varphi),$$

$$U_{\varphi\,7\,0} = \frac{1}{4}\frac{A_{70}\left(1+\nu\right)}{E}\left(-\left(3+\nu\right)\ln(r)-1-\nu\right)\sin(\varphi),$$

$$\sigma_{r80} = \frac{1}{4}\frac{A_{80}\left(3+\nu\right)\sin(\varphi)}{r}\,,$$

$$\sigma_{\varphi\,80} = \frac{1}{4}\frac{A_{80}\left(-1+\nu\right)\sin(\varphi)}{r}\,,$$

$$\sigma_{r\varphi80} = \frac{1}{4}\frac{A_{80}\left(1-\nu\right)\cos(\varphi)}{r}\,,$$

$$U_{r80} = \frac{1}{4}\frac{A_{80}\left(1+\nu\right)\left(3-\nu\right)}{E} \ln(r)\sin(\varphi),$$

$$U_{\varphi\,8\,0} = -\frac{1}{4}\frac{A_{80}\left(1+\nu\right)}{E}\left(\left(-3+\nu\right)\ln(r)-1-\nu\right)\cos(\varphi),$$

$$U_{r\,2n} = -\frac{A_{2n}\left(n\left(1+\nu\right)-2\left(1-\nu\right)\right)}{E} r^{n+1}\cos(n\varphi),$$

$$U_{r\,4n} = \frac{A_{4n}\left(n\left(1+\nu\right)+2\left(1-\nu\right)\right)}{E} r^{-n+1}\cos(n\varphi),$$

$$U_{r\,6n} = -\frac{A_{6n}\left(n\left(1+\nu\right)-2\left(1-\nu\right)\right)}{E} r^{n+1}\sin(n\varphi),$$

$$U_{r8n}=\frac{A_{8n}\left(n(1+\nu)+2(1-\nu)\right)}{E}r^{-n+1}\sin(n\varphi),$$

$$U_{\varphi 2n}=\frac{A_{2n}\left(n(1+\nu)+4\right)}{E}r^{n+1}\sin(n\varphi),$$

$$U_{\varphi 4n}=\frac{A_{4n}\left(n(1+\nu)-4\right)}{E}r^{-n+1}\sin(n\varphi),$$

$$U_{\varphi 6n}=-\frac{A_{6n}\left(n(1+\nu)+4\right)}{E}r^{n+1}\cos(n\varphi),$$

$$U_{\varphi 8n}=-\frac{A_{8n}\left(n(1+\nu)-4\right)}{E}r^{-n+1}\cos(n\varphi).$$

Для ПДС

$$U_{r00}=-\frac{A_{00}(1+\nu)}{E\,r},$$

$$U_{r10}=2\frac{A_{10}(1+\nu)(1-2\nu)r}{E},$$

$$U_{r20}=0$$

$$U_{r30}=\frac{A_{30}(1+\nu)(1-4\nu)}{E}r^{2}\cos(\varphi),$$

$$U_{r40}=\frac{A_{40}(1+\nu)}{E\,r^{2}}\cos(\varphi),$$

$$U_{r50}=\frac{A_{50}(1+\nu)(1-4\,\nu)}{E}r^{2}\sin(\varphi),$$

$$U_{r60}=\frac{A_{60}(1+\nu)}{E\,r^{2}}\sin(\varphi),$$

$$U_{\varphi 00}=0,$$

$$U_{\varphi 10}=0,$$

$$U_{\varphi 20}=-\frac{A_{20}(1+\nu)}{E\,r},$$

$$U_{\varphi 30}=\frac{A_{30}(1+\nu)(5-4\,\nu)}{E}r^{2}\sin(\varphi),$$

$$U_{\varphi 40}=\frac{A_{40}(1+\nu)}{E\,r^{2}}\sin(\varphi),$$

$$U_{\varphi 50}=-\frac{A_{50}(1+\nu)(5-4\,\nu)}{E}r^{2}\cos(\varphi),$$

$$U_{\varphi 60}=-\frac{A_{60}(1+\nu)}{E\,r^{2}}\cos(\varphi),$$

$$\sigma_{r70}=\frac{1}{4}\frac{A_{70}(3-2\nu)\cos(\varphi)}{(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{\varphi 70}=\frac{1}{4}\frac{A_{70}(2\nu-1)\cos(\varphi)}{(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{r\varphi 70}=\frac{1}{4}\frac{A_{70}(2\nu-1)\sin(\varphi)}{(1-\nu)r},$$

$$U_{r70} = \frac{1}{4}\frac{A_{70}(1+\nu)(3-4\nu)}{(1-\nu)E}\ln(r)\cos(\varphi),$$

$$U_{\varphi 70} = \frac{1}{4}\frac{A_{70}(1+\nu)}{(1-\nu)E}(-(3-4\nu)\ln(r)-1)\sin(\varphi),$$

$$\sigma_{r80} = \frac{1}{4}\frac{A_{80}(3-2\nu)\sin(\varphi)}{(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{\varphi 80} = \frac{1}{4}\frac{A_{80}(2\nu-1)\sin(\varphi)}{(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{r\varphi 80} = \frac{1}{4}\frac{A_{80}(1-2\nu)\cos(\varphi)}{(1-\nu)r},$$

$$U_{r80} = \frac{1}{4}\frac{A_{80}(1+\nu)(3-4\nu)}{(1-\nu)E}\ln(r)\sin(\varphi),$$

$$U_{\varphi 80} = -\frac{1}{4}\frac{A_{80}(1+\nu)}{(1-\nu)E}((-3+4\nu)\ln(r)-1)\cos(\varphi),$$

$$U_{r2n} = -\frac{A_{2n}(1+\nu)(4\nu+n-2)}{E}r^{n+1}\cos(n\varphi),$$

$$U_{r4n} = \frac{A_{4n}(1+\nu)(4\nu-n-2)}{E}r^{-n+1}\cos(n\varphi),$$

$$U_{r6n} = -\frac{A_{6n}(1+\nu)(4\nu+n-2)}{E}r^{n+1}\sin(n\varphi),$$

$$U_{r8n} = \frac{A_{8n}(1+\nu)(4\nu-n-2)}{E}r^{-n+1}\sin(n\varphi),$$

$$U_{\varphi 2n} = \frac{A_{2n}(1+\nu)(4\nu-n-4)}{E}r^{n+1}\sin(n\varphi),$$

$$U_{\varphi 4n} = \frac{A_{4n}(1+\nu)(4\nu+n-4)}{E}r^{-n+1}\sin(n\varphi),$$

$$U_{\varphi 6n} = -\frac{A_{6n}(1+\nu)(4\nu-n-4)}{E}r^{n+1}\cos(n\varphi),$$

$$U_{\varphi 8n} = -\frac{A_{8n}(1+\nu)(4\nu+n-4)}{E}r^{-n+1}\cos(n\varphi).$$

Приложение 4. Частные решения плоской статической задачи линейной теории упругости для некоторых видов массовых сил

Наиболее часто на практике встречаются сила тяжести и центробежные силы. В данном приложении даны частные решения для данных видов массовых сил в случае ПНС и ПДС.

Рассмотрим действие силы тяжести в направлении одной из осей декартовой СК, например в направлении x. Ранее были приведены основные уравнения для плоской задачи, и с учетом введенных обозначений $F_x = g_x \rho$, $F_y = 0$, где g_x и ρ – ускорение и плотность соответственно. Частное решение уравнений равновесия в напряжениях можно записать в следующем виде

$$\sigma_x = -\int F_x \, dx, \; \sigma_y = 0, \; \sigma_{xy} = 0,$$

или, после интегрирования

$$\sigma_x = -g_x \rho x, \; \sigma_y = 0, \; \sigma_{xy} = 0.$$

Используя геометрические и физические уравнения, получаем выражения для перемещений.

Для ПНС

$$U_x = -\frac{1}{2}\frac{g_x \rho}{E}\left(x^2 + \nu y^2\right),$$

$$U_y = \frac{\nu g_x \rho}{E} x y.$$

Для ПДС

$$U_x = -\frac{1}{2}\frac{g_x \rho (1+\nu)}{E}\left((1-\nu)x^2 + \nu y^2\right),$$

$$U_y = \frac{\nu (1+\nu) g_x \rho}{E} x y.$$

Формулы, при действии силы тяжести в направлении оси y могут быть получены соответствующей заменой индексов.

Рассмотрим теперь вращение вокруг оси y с угловой скоростью ϖ_y, тогда в направлении ортогональном y действует сила, прямо пропорциональная расстоянию до оси, то есть $F_x = \varpi_y^2 \rho x$, $F_y = 0$. Частное решение может быть записано в виде

$$\sigma_x = -\int F_x \, dx, \; \sigma_y = A\sigma_x, \; \sigma_{xy} = 0,$$

где A – некоторая константа. Перемещения находятся из соответствующих соотношений, а константа A – из уравнения совместности. Окончательно получаем:

для ПНС

$$\sigma_x = -\frac{1}{2}\varpi_y^2 \rho x^2,$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{2}\nu \varpi_y^2 \rho x^2,$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

$$U_x = -\frac{1}{6}\frac{(1-\nu)(1+\nu)\varpi_y^2 \rho}{E} x^3,$$

$$U_y = 0.$$

Для ПДС

$$\sigma_x = -\frac{1}{2}\varpi_y^2\,\rho x^2,$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{2}\frac{\nu}{1-\nu}\varpi_y^2\,\rho x^2,$$

$$\sigma_{xy} = 0,$$

$$U_x = -\frac{1}{6}\frac{(1-2\nu)(1+\nu)\,\varpi_y^2\,\rho}{(1-\nu)E}x^3,$$

$$U_y = 0.$$

Формулы при вращении вокруг ортогональной оси x получаются простой заменой индексов $x \longleftrightarrow y$.

Еще один случай центробежных сил – вращение вокруг оси z, перпендикулярной плоскости xy. Частное решение для данной задачи легче получить в цилиндрической СК (r, φ, z). Формулы перехода следующие: $x = r\cos(\varphi)$, $x = r\sin(\varphi)$, $z = z$. Уравнения плоской задачи теории упругости с цилиндрической СК приведены в соответствующем приложении, при этом получаем массовые силы $F_r = \varpi_z^2\,\rho r$, $F_\varphi = 0$. Частные решения уравнений равновесия даны в [127]:

для ПНС

$$U_r = -\frac{1}{8}\frac{(1-\nu^2)\rho\varpi_z^2}{E}r^3,$$

$$U_\varphi = 0$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{8}(3+\nu)\varpi_z^2\,\rho r^2,$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{1}{8}(1+3\nu)\varpi_z^2\,\rho r^2,$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0.$$

Для ПДС

$$U_r = -\frac{1}{8}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho\varpi_z^2}{(1-\nu)E}r^3,$$

$$U_\varphi = 0,$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{8}\frac{(3-2\nu)}{(1-\nu)}\varpi_z^2\,\rho r^2,$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{1}{8}\frac{(1+2\nu)}{(1-\nu)}\varpi_z^2\,\rho r^2,$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0.$$

Запишем перемещения и напряжения в декартовой СК. Переход осуществляется по следующим формулам

$$U_x = U_r\cos(\varphi),$$

$$U_y = U_r\sin(\varphi),$$

$$\sigma_x = \sigma_r\cos^2(\varphi) + \sigma_\varphi\sin^2(\varphi),$$

$$\sigma_y = \sigma_\varphi\cos^2(\varphi) + \sigma_r\sin^2(\varphi),$$

$$\sigma_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\varphi)\cos(\varphi)\sin(\varphi).$$

Окончательно получаем:

для ПНС

$$U_x = -\frac{1}{8}\frac{\left(1-\nu^2\right)\rho\varpi_z^2}{E} r^2\, x\,,$$

$$U_y = -\frac{1}{8}\frac{\left(1-\nu^2\right)\rho\varpi_z^2}{E} r^2\, y\,,$$

$$\sigma_x = -\frac{1}{8}\rho\varpi_z^2\left(\left(3+\nu\right)x^2 + \left(1+3\nu\right)y^2\right),$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{8}\rho\varpi_z^2\left(\left(3+\nu\right)y^2 + \left(1+3\nu\right)x^2\right),$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4}\rho\varpi_z^2\left(1-\nu\right)x\,y\,.$$

Для ПДС

$$U_x = -\frac{1}{8}\frac{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)\rho\varpi_z^2}{\left(1-\nu\right)E} r^2\, x\,,$$

$$U_y = -\frac{1}{8}\frac{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)\rho\varpi_z^2}{\left(1-\nu\right)E} r^2\, y\,,$$

$$\sigma_x = -\frac{1}{8}\frac{\rho\varpi_z^2}{1-\nu}\left(\left(1+2\nu\right)x^2 + \left(3-2\nu\right)y^2\right),$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{8}\frac{\rho\varpi_z^2}{1-\nu}\left(\left(1+2\nu\right)y^2 + \left(3-2\nu\right)x^2\right),$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{4}\frac{\rho\varpi_z^2\left(1-2\nu\right)}{1-\nu}x\,y\,.$$

Приложение 5. Осесимметричная статическая задача линейной теории упругости в сферической СК

В данном приложении приведены уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения осесимметричной статической задачи линейной теории упругости в сферической СК (r,θ,φ) (уравнения оси симметрии $\varphi=0,\theta=0$) и общее решение для перемещений и напряжений.

Примем следующие обозначения основных переменных:

U_r, U_θ – компоненты вектора перемещений;

$\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \sigma_{r\theta}$ – компоненты тензора напряжений;

$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{r\theta}$ – компоненты тензора деформаций.

Основные соотношения в сферической СК приведены в [82]. Геометрические соотношения

$$\varepsilon_r=\frac{\partial}{\partial r}(U_r),$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{U_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(U_\theta),$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{U_r}{r}+\frac{U_\theta\cot(\theta)}{r},$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(U_r)+\frac{\partial}{\partial r}(U_\theta)-\frac{U_\theta}{r}\right).$$

Физические уравнения

$$\sigma_{ii}=\lambda e+2\mu\varepsilon_{ii},$$

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}\quad i,j=r,\theta,\varphi\quad i\neq j,$$

где $e=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi$ – объемная деформация, λ и μ – константы Ляме

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_{r\theta})+\frac{2\sigma_r-\sigma_\theta-\sigma_\varphi+\sigma_{r\theta}\cot(\theta)}{r}+F_r=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{r\theta})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_\theta)+\frac{(\sigma_\theta-\sigma_\varphi)\cot(\theta)+3\sigma_{r\theta}}{r}+F_\theta=0,$$

где F_r и F_θ – массовые силы в направлениях r и θ соответственно.

Уравнения равновесия в перемещениях

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(U_r)+\frac{2U_r+\frac{\partial}{\partial\theta}(U_\theta)+U_\theta\cot(\theta)}{r}\right)+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2}\left(\cot(\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(U_r)-\frac{\partial}{\partial r}(rU_\theta)\right)+F_r=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(U_r)+\frac{2U_r+\frac{\partial}{\partial\theta}(U_\theta)+U_\theta\cot(\theta)}{r}\right)+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rU_\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}(U_r)\right)+F_\theta=0.$$

В [82] дано общее решение осесимметричной задачи теории упругости в сферической СК

$$U_{r00}=-2\frac{A_{00}(1-2\nu)(1+\nu)}{E}r,$$

$$U_{\theta00}=0,$$

$$\sigma_{r00}=-2A_{00}(1+\nu),$$

$$\sigma_{\theta00}=-2A_{00}(1+\nu),$$

$$\sigma_{\varphi00}=-2A_{00}(1+\nu),$$

$$\sigma_{r\theta00}=0,$$

$$U_{r10}=-2\frac{A_{10}(1-4\nu)(1+\nu)}{E}r^2\cos(\theta),$$

$$U_{\theta10}=-2\frac{A_{10}(3-2\nu)(1+\nu)}{E}r^2\sin(\theta),$$

$$\sigma_{r10}=-4A_{10}(1+\nu)r\cos(\theta),$$

$$\sigma_{\theta10}=-8A_{10}(1+\nu)r\cos(\theta),$$

$$\sigma_{\varphi10}=-8A_{10}(1+\nu)r\cos(\theta),$$

$$\sigma_{r\theta10}=-2A_{10}(1+\nu)r\sin(\theta),$$

$$U_{r20}=\frac{A_{20}}{E}\cos(\theta),$$

$$U_{\theta20}=-\frac{A_{20}}{E}\sin(\theta),$$

$$\sigma_{r20}=0,$$

$$\sigma_{\theta20}=0,$$

$$\sigma_{\varphi20}=0,$$

$$\sigma_{r\theta20}=0,$$

$$U_{r30}=-\frac{A_{30}(1+\nu)}{Er^2},$$

$$U_{\theta30}=0,$$

$$\sigma_{r30}=2\frac{A_{30}}{r^3},$$

$$\sigma_{\theta30}=-\frac{A_{30}}{r^3},$$

$$\sigma_{\varphi30}=-\frac{A_{30}}{r^3},$$

$$\sigma_{r\theta30}=0,$$

$$U_{r40}=4\frac{A_{40}(1-\nu)(1+\nu)}{Er}\cos(\theta),$$

$$U_{\theta 40} = -\frac{A_{40}\,(3-4\nu)(1+\nu)}{E\,r}\sin(\theta),$$

$$\sigma_{r40} = -2\frac{A_{40}\,(2-\nu)}{r^2}\cos(\theta),$$

$$\sigma_{\theta 40} = \frac{A_{40}\,(1-2\nu)}{r^2}\cos(\theta),$$

$$\sigma_{\varphi 40} = \frac{A_{40}\,(1-2\nu)}{r^2}\cos(\theta),$$

$$\sigma_{r\theta 40} = \frac{A_{40}\,(1-2\nu)}{r^2}\sin(\theta),$$

$$U_{r50} = -2\frac{A_{50}\,(1+\nu)}{E\,r^3}\cos(\theta),$$

$$U_{\theta 50} = -\frac{A_{50}\,(1+\nu)}{E\,r^3}\sin(\theta),$$

$$\sigma_{r50} = 6\frac{A_{50}}{r^4}\cos(\theta),$$

$$\sigma_{\theta 50} = -3\frac{A_{50}}{r^4}\cos(\theta),$$

$$\sigma_{\varphi 50} = -3\frac{A_{50}}{r^4}\cos(\theta),$$

$$\sigma_{r\theta 50} = 3\frac{A_{50}}{r^4}\sin(\theta),$$

$$U_{r1n} = \frac{A_{1n}\,(1+\nu)(n+1)(n-2+4\nu)}{E}r^{n+1}\,P_n(\chi),$$

$$U_{r2n} = \frac{A_{2n}\,(1+\nu)n}{E}r^{n-1}\,P_n(\chi),$$

$$U_{r3n} = \frac{A_{3n}\,(1+\nu)n(n+3-4\nu)}{E}r^{-n}\,P_n(\chi),$$

$$U_{r4n} = -\frac{A_{4n}\,(1+\nu)(n+1)}{E}r^{-n-2}\,P_n(\chi),$$

$$U_{\theta 1n} = -\frac{A_{1n}\,(1+\nu)(n+5-4\nu)}{E}r^{n+1}\frac{\partial}{\partial\chi}(P_n(\chi))\sin(\theta),$$

$$U_{\theta 2n} = -\frac{A_{2n}\,(1+\nu)}{E}r^{n-1}\frac{\partial}{\partial\chi}(P_n(\chi))\sin(\theta),$$

$$U_{\theta 3n} = -\frac{A_{3n}\,(1+\nu)(-n+4-4\nu)}{E}r^{-n}\frac{\partial}{\partial\chi}(P_n(\chi))\sin(\theta),$$

$$U_{\theta 4n} = -\frac{A_{4n}\,(1+\nu)}{E}r^{-n-2}\frac{\partial}{\partial\chi}(P_n(\chi))\sin(\theta),$$

$$\sigma_{r1n} = A_{1n}\,(n+1)(n(n-1)-2(1+\nu))r^n\,P_n(\chi),$$

$$\sigma_{r2n} = A_{2n}\,n(n-1)r^{n-2}\,P_n(\chi),$$

$$\sigma_{r3n} = -A_{3n}\,n(n(n+3)-2\nu)r^{-n-1}\,P_n(\chi),$$

$$\sigma_{r4n} = A_{4n}\,(n+1)(n+2)r^{-n-3}\,P_n(\chi),$$

$$\sigma_{\theta 1n} = A_{1n}\left(-(n+1)\bigl(n(n+4)+2(1+\nu)\bigr)P_n(\chi)+(n+5-4\nu)\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)\right)r^n,$$

$$\sigma_{\theta 2n} = A_{2n}\left(-n^2\,P_n(\chi)+\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)\right)r^{n-2},$$

$$\sigma_{\theta 3n} = A_{3n}\left(n\bigl(n(n-2)+2\nu-1\bigr)P_n(\chi)+(-n+4-4\nu)\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)\right)r^{-n-1},$$

$$\sigma_{\theta 4n} = A_{4n}\left(-(n+1)^2\,P_n(\chi)+\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)\right)r^{-n-3},$$

$$\sigma_{r\theta 1n} = -A_{1n}\,\bigl(n(n+2)-1+2\nu\bigr)\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)r^n,$$

$$\sigma_{r\theta 2n} = -A_{2n}\,(n-1)\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)r^{n-2},$$

$$\sigma_{r\theta 3n} = -A_{3n}\,\bigl(n^2-2(1-\nu)\bigr)\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)r^{-n-1},$$

$$\sigma_{r\theta 4n} = -A_{4n}\,(-n-2)\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)r^{-n-3},$$

$$\sigma_{\varphi 1n} = A_{1n}\left((n+1)\bigl(n(1-4\nu)-2(1+\nu)\bigr)P_n(\chi)-(n+5-4\nu)\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)\right)r^n,$$

$$\sigma_{\varphi 2n} = A_{2n}\left(n\,P_n(\chi)+\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)\right)r^{n-2},$$

$$\sigma_{\varphi 3n} = A_{3n}\left(n\bigl(n(1-4\nu)-2\nu+3\bigr)P_n(\chi)-(-n+4-4\nu)\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)\right)r^{-n-1},$$

$$\sigma_{\varphi 4n} = A_{4n}\left(-(n+1)P_n(\chi)-\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\bigl(P_n(\chi)\bigr)\right)r^{-n-3},$$

где $\chi = \cos(\theta)$, P_n – полиномы Лежандра.

Приложение 6. Осесимметричная статическая задача линейной теории упругости в цилиндрической СК

В данном приложении приведены уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения осесимметричной статической задачи линейной теории упругости в цилиндрической СК (r,φ,z) (ось симметрии – ось z) и общее решение для перемещений и напряжений.

Примем следующие обозначения основных переменных:

U_r, U_z – компоненты вектора перемещений;

$\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\varphi, \sigma_{rz}$ – компоненты тензора напряжений;

$\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_{rz}$ – компоненты тензора деформаций.

Основные соотношения в цилиндрической СК приведены в [121]. Геометрические соотношения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r}(U_r),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial}{\partial z}(U_z),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{U_r}{r},$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}(U_r) + \frac{\partial}{\partial r}(U_z)\right).$$

Физические уравнения (напряжения выражены через перемещения)

$$\sigma_r = 2\mu\left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{\partial}{\partial r}(U_r)\right),$$

$$\sigma_z = 2\mu\left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{\partial}{\partial z}(U_z)\right),$$

$$\sigma_\varphi = 2\mu\left(\frac{\nu\Theta}{1-2\nu} + \frac{U_r}{r}\right),$$

$$\sigma_{rz} = \mu\left(\frac{\partial}{\partial z}(U_r) + \frac{\partial}{\partial r}(U_z)\right),$$

где $\Theta = \frac{\partial}{\partial r}(U_r) + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial}{\partial z}(U_z)$ – объемная деформация, λ и μ – константы Ляме

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_r) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{rz}) + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + F_r = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_z) + \frac{\sigma_{rz}}{r} + F_z = 0,$$

где F_r и F_z – массовые силы в направлениях r и z соответственно.

Уравнения равновесия в перемещениях

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(U_r)-\frac{U_r}{r^2}\right)+\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}(U_r)+(\lambda+3\mu)\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}(U_z)+F_r=0,$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2}{\partial z^2}(U_z)-\mu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_z)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(U_z)\right)+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}(U_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(U_r)\right)+F_z=0.$$

В [121] дано общее решение осесимметричной задачи теории упругости в цилиндрической СК

$$\sigma_{r00}=0,$$

$$\sigma_{z00}=0,$$

$$\sigma_{\varphi 00}=0,$$

$$\sigma_{rz00}=0,$$

$$U_{r00}=0,$$

$$U_{z00}=\frac{A_{00}}{E},$$

$$\sigma_{r10}=2A_{10},$$

$$\sigma_{z00}=4\nu A_{10},$$

$$\sigma_{\varphi 00}=2A_{10},$$

$$\sigma_{rz10}=0,$$

$$U_{r10}=\frac{2A_{10}(1-2\nu)(1+\nu)}{E}r,$$

$$U_{z10}=0,$$

$$\sigma_{r20}=-\frac{4(1-\nu)A_{20}}{r^2},$$

$$\sigma_{z20}=0,$$

$$\sigma_{\varphi 20}=\frac{4(1-\nu)A_{20}}{r^2},$$

$$\sigma_{rz20}=0,$$

$$U_{r20}=\frac{4A_{20}(1-\nu)(1+\nu)}{Er},$$

$$U_{z20}=0,$$

$$\sigma_{r30}=0,$$

$$\sigma_{z30}=A_{30},$$

$$\sigma_{\varphi 30}=0,$$

$$\sigma_{rz30}=0,$$

$$U_{r30}=-\frac{\nu A_{30}}{E}r,$$

$$U_{z30}=\frac{A_{30}}{E}z,$$

$$U_{r1n}=\frac{A_{1n}}{E}\sin(\lambda_n z)\left(-(1+\nu)\lambda_n r\,I_0(\lambda_n r)+2(1-\nu^2)I_1(\lambda_n r)\right),$$

$$U_{z1n} = \frac{A_{1n}}{E} \cos(\lambda_n z)\left(-(1+\nu)\lambda_n r I_1(\lambda_n r) - 2\left(1-\nu^2\right) I_0(\lambda_n r)\right),$$

$$U_{r2n} = \frac{A_{2n}}{E} \cos(\lambda_n z)\left(-(1+\nu)\lambda_n r I_0(\lambda_n r) + 2\left(1-\nu^2\right) I_1(\lambda_n r)\right),$$

$$U_{z2n} = \frac{A_{2n}}{E} \sin(\lambda_n z)\left((1+\nu)\lambda_n r I_1(\lambda_n r) + 2\left(1-\nu^2\right) I_0(\lambda_n r)\right),$$

$$U_{r3n} = \frac{A_{3n}}{E} \sin(\lambda_n z)\left((1+\nu)\lambda_n r K_0(\lambda_n r) + 2\left(1-\nu^2\right) K_1(\lambda_n r)\right),$$

$$U_{z3n} = \frac{A_{3n}}{E} \cos(\lambda_n z)\left(-(1+\nu)\lambda_n r K_1(\lambda_n r) + 2\left(1-\nu^2\right) K_0(\lambda_n r)\right),$$

$$U_{r4n} = \frac{A_{4n}}{E} \cos(\lambda_n z)\left((1+\nu)\lambda_n r K_0(\lambda_n r) + 2\left(1-\nu^2\right) K_1(\lambda_n r)\right),$$

$$U_{z4n} = \frac{A_{4n}}{E} \sin(\lambda_n z)\left((1+\nu)\lambda_n r K_1(\lambda_n r) - 2\left(1-\nu^2\right) K_0(\lambda_n r)\right),$$

$$U_{r5n} = \frac{(1+\nu)A_{5n}}{E} \sin(\lambda_n z) I_1(\lambda_n r),$$

$$U_{z5n} = \frac{(1+\nu)A_{5n}}{E} \cos(\lambda_n z) I_0(\lambda_n r),$$

$$U_{r6n} = \frac{(1+\nu)A_{6n}}{E} \cos(\lambda_n z) I_1(\lambda_n r),$$

$$U_{z6n} = -\frac{(1+\nu)A_{6n}}{E} \sin(\lambda_n z) I_0(\lambda_n r),$$

$$U_{r7n} = \frac{(1+\nu)A_{7n}}{E} \sin(\lambda_n z) K_1(\lambda_n r),$$

$$U_{z7n} = -\frac{(1+\nu)A_{7n}}{E} \cos(\lambda_n z) K_0(\lambda_n r),$$

$$U_{r8n} = \frac{(1+\nu)A_{8n}}{E} \cos(\lambda_n z) K_1(\lambda_n r),$$

$$U_{z8n} = \frac{(1+\nu)A_{8n}}{E} \sin(\lambda_n z) K_0(\lambda_n r),$$

$$U_{r9n} = \frac{A_{9n}}{E} J_1(\lambda_n r)\left((1+\nu)\lambda_n z \cosh(\lambda_n z) + 2\left(1-\nu^2\right)\sinh(\lambda_n z)\right),$$

$$U_{z9n} = \frac{A_{9n}}{E} J_0(\lambda_n r)\left(-(1+\nu)\lambda_n z \sinh(\lambda_n z) + \left(1-\nu-2\nu^2\right)\cosh(\lambda_n z)\right),$$

$$U_{r10n} = \frac{A_{10n}}{E} J_1(\lambda_n r)\left((1+\nu)\lambda_n z \sinh(\lambda_n z) + 2\left(1-\nu^2\right)\cosh(\lambda_n z)\right),$$

$$U_{z10n} = \frac{A_{10n}}{E} J_0(\lambda_n r)\left(-(1+\nu)\lambda_n z \cosh(\lambda_n z) + \left(1-\nu-2\nu^2\right)\sinh(\lambda_n z)\right),$$

$$U_{r11n} = \frac{A_{11n}}{E} Y_1(\lambda_n r)\left((1+\nu)\lambda_n z \cosh(\lambda_n z) + 2\left(1-\nu^2\right)\sinh(\lambda_n z)\right),$$

$$U_{z11n} = \frac{A_{11n}}{E} Y_0(\lambda_n r)\left(-(1+\nu)\lambda_n z \sinh(\lambda_n z) + \left(1-\nu-2\nu^2\right)\cosh(\lambda_n z)\right),$$

$$U_{r12n} = \frac{A_{12n}}{E} Y_1(\lambda_n r)\left((1+\nu)\lambda_n z \sinh(\lambda_n z) + 2\left(1-\nu^2\right)\cosh(\lambda_n z)\right),$$

$$U_{z12n}=\frac{A_{12n}}{E}Y_0(\lambda_n r)\left(-(1+\nu)\lambda_n z\cosh(\lambda_n z)+\left(1-\nu-2\nu^2\right)\sinh(\lambda_n z)\right),$$

$$U_{r13n}=\frac{(1+\nu)A_{13n}}{E}\sinh(\lambda_n z)J_1(\lambda_n r),$$

$$U_{z13n}=-\frac{(1+\nu)A_{13n}}{E}\cosh(\lambda_n z)J_0(\lambda_n r),$$

$$U_{r14n}=\frac{(1+\nu)A_{14n}}{E}\cosh(\lambda_n z)J_1(\lambda_n r),$$

$$U_{z14n}=-\frac{(1+\nu)A_{14n}}{E}\sinh(\lambda_n z)J_0(\lambda_n r),$$

$$U_{r15n}=\frac{(1+\nu)A_{15n}}{E}\sinh(\lambda_n z)Y_1(\lambda_n r),$$

$$U_{z15n}=-\frac{(1+\nu)A_{15n}}{E}\cosh(\lambda_n z)Y_0(\lambda_n r),$$

$$U_{r16n}=\frac{(1+\nu)A_{16n}}{E}\cosh(\lambda_n z)Y_1(\lambda_n r),$$

$$U_{z16n}=-\frac{(1+\nu)A_{16n}}{E}\sinh(\lambda_n z)Y_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r1n}=A_{1n}\sin(\lambda_n z)\left(\lambda_n I_0(\lambda_n r)-\left(\lambda_n^2 r+2\frac{1-\nu}{r}\right)I_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{\varphi 1n}=A_{1n}\sin(\lambda_n z)\left((2\nu-1)\lambda_n I_0(\lambda_n r)+2\frac{1-\nu}{r}I_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{z1n}=A_{1n}\sin(\lambda_n z)\left(2\lambda_n I_0(\lambda_n r)+\lambda_n^2 r I_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{rz1n}=-A_{1n}\lambda_n^2 r\cos(\lambda_n z)I_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r2n}=A_{2n}\cos(\lambda_n z)\left(\lambda_n I_0(\lambda_n r)-\left(\lambda_n^2 r+2\frac{1-\nu}{r}\right)I_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{\varphi 2n}=A_{2n}\cos(\lambda_n z)\left((2\nu-1)\lambda_n I_0(\lambda_n r)+2\frac{1-\nu}{r}I_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{z2n}=A_{2n}\cos(\lambda_n z)\left(2\lambda_n I_0(\lambda_n r)+\lambda_n^2 r I_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{rz2n}=A_{2n}\lambda_n^2 r\sin(\lambda_n z)I_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r3n}=A_{3n}\sin(\lambda_n z)\left(-\lambda_n K_0(\lambda_n r)-\left(\lambda_n^2 r+2\frac{1-\nu}{r}\right)K_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{\varphi 3n}=A_{3n}\sin(\lambda_n z)\left((1-2\nu)\lambda_n K_0(\lambda_n r)+2\frac{1-\nu}{r}K_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{z3n}=A_{3n}\sin(\lambda_n z)\left(-2\lambda_n K_0(\lambda_n r)+\lambda_n^2 r K_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{rz3n}=A_{3n}\lambda_n^2 r\cos(\lambda_n z)K_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r4n}=A_{4n}\cos(\lambda_n z)\left(-\lambda_n K_0(\lambda_n r)-\left(\lambda_n^2 r+2\frac{1-\nu}{r}\right)K_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{\varphi 4n}=A_{4n}\cos(\lambda_n z)\left((1-2\nu)\lambda_n K_0(\lambda_n r)+2\frac{1-\nu}{r}K_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{z4n}=A_{4n}\cos(\lambda_n z)\left(-2\lambda_n K_0(\lambda_n r)+\lambda_n^2 r K_1(\lambda_n r)\right),$$

$$\sigma_{rz4n} = -A_{4n}\,\lambda_n^2\, r \sin(\lambda_n z) K_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r5n} = A_{5n} \sin(\lambda_n z)\left(\lambda_n I_0(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n r)}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi 5n} = A_{5n} \sin(\lambda_n z) \frac{I_1(\lambda_n r)}{r},$$

$$\sigma_{z5n} = -A_{5n}\,\lambda_n \sin(\lambda_n z)\, I_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{rz5n} = A_{5n}\,\lambda_n \cos(\lambda_n z)\, I_1(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r6n} = A_{6n} \cos(\lambda_n z)\left(\lambda_n I_0(\lambda_n r) - \frac{I_1(\lambda_n r)}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi 6n} = A_{6n} \cos(\lambda_n z) \frac{I_1(\lambda_n r)}{r},$$

$$\sigma_{z6n} = -A_{6n}\,\lambda_n \cos(\lambda_n z)\, I_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{rz6n} = -A_{6n}\,\lambda_n \sin(\lambda_n z)\, I_1(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r7n} = A_{7n} \sin(\lambda_n z)\left(-\lambda_n K_0(\lambda_n r) - \frac{K_1(\lambda_n r)}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi 7n} = A_{7n} \sin(\lambda_n z) \frac{K_1(\lambda_n r)}{r},$$

$$\sigma_{z7n} = A_{7n}\,\lambda_n \sin(\lambda_n z)\, K_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{rz7n} = A_{7n}\,\lambda_n \cos(\lambda_n z)\, K_1(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r8n} = A_{8n} \cos(\lambda_n z)\left(-\lambda_n K_0(\lambda_n r) - \frac{K_1(\lambda_n r)}{r}\right),$$

$$\sigma_{\varphi 8n} = A_{8n} \cos(\lambda_n z) \frac{K_1(\lambda_n r)}{r},$$

$$\sigma_{z8n} = A_{8n}\,\lambda_n \cos(\lambda_n z)\, K_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{rz8n} = -A_{8n}\,\lambda_n \sin(\lambda_n z)\, K_1(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{r9n} = A_{9n}\left(\left(\lambda_n J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n r)}{r}\right)\lambda_n z \cosh(\lambda_n z) + \left(2\lambda_n J_0(\lambda_n r) - 2(1-\nu)\frac{J_1(\lambda_n r)}{r}\right)\sinh(\lambda_n z)\right)$$

$$\sigma_{\varphi 9n} = A_{9n}\left(\lambda_n z \cosh(\lambda_n z)\frac{J_1(\lambda_n r)}{r} + \left(2\nu\lambda_n J_0(\lambda_n r) + 2(1-\nu)\frac{J_1(\lambda_n r)}{r}\right)\sinh(\lambda_n z)\right),$$

$$\sigma_{z9n} = -A_{9n}\,\lambda_n^2\, z \cosh(\lambda_n z) J_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{rz9n} = A_{9n}\,\lambda_n J_1(\lambda_n r)\left(\cosh(\lambda_n z) + \lambda_n z \sinh(\lambda_n z)\right),$$

$$\sigma_{r10n} = A_{10n}\left(\left(\lambda_n J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n r)}{r}\right)\lambda_n z \sinh(\lambda_n z) + \left(2\lambda_n J_0(\lambda_n r) - 2(1-\nu)\frac{J_1(\lambda_n r)}{r}\right)\cosh(\lambda_n z)\right)$$

$$\sigma_{\varphi 10n} = A_{10n}\left(\lambda_n z \sinh(\lambda_n z)\frac{J_1(\lambda_n r)}{r} + \left(2\nu\lambda_n J_0(\lambda_n r) + 2(1-\nu)\frac{J_1(\lambda_n r)}{r}\right)\cosh(\lambda_n z)\right),$$

$$\sigma_{z10n} = -A_{10n}\,\lambda_n^2\, z \sinh(\lambda_n z) J_0(\lambda_n r),$$

$$\sigma_{rz10n} = A_{10n}\,\lambda_n J_1(\lambda_n r)\left(\sinh(\lambda_n z) + \lambda_n z \cosh(\lambda_n z)\right),$$

$$\sigma_{r11n} = A_{11n}\left(\left(\lambda_n Y_0(\lambda_n r) - \frac{Y_1(\lambda_n r)}{r}\right)\lambda_n z \cosh(\lambda_n z) + \left(2\lambda_n Y_0(\lambda_n r) - 2(1-\nu)\frac{Y_1(\lambda_n r)}{r}\right)\sinh(\lambda_n z)\right)$$

$$\sigma_{\varphi 11n} = A_{11n}\left(\lambda_n z \cosh(\lambda_n z)\frac{Y_1(\lambda_n r)}{r} + \left(2\nu\lambda_n Y_0(\lambda_n r) + 2(1-\nu)\frac{Y_1(\lambda_n r)}{r}\right)\sinh(\lambda_n z)\right),$$

$$\sigma_{z11n} = -A_{11n}\,\lambda_n^2\, z\cosh(\lambda_n z) Y_0(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{rz11n} = A_{11n}\,\lambda_n\, Y_1(\lambda_n r)\left(\cosh(\lambda_n z) + \lambda_n z\sinh(\lambda_n z)\right),$$
$$\sigma_{r12n} = A_{12n}\left(\left(\lambda_n Y_0(\lambda_n r) - \frac{Y_1(\lambda_n r)}{r}\right)\lambda_n z\sinh(\lambda_n z) + \left(2\lambda_n Y_0(\lambda_n r) - 2(1-\nu)\frac{Y_1(\lambda_n r)}{r}\right)\cosh(\lambda_n z)\right)$$
$$\sigma_{\varphi 12n} = A_{12n}\left(\lambda_n z\sinh(\lambda_n z)\frac{J_2(\lambda_n r)}{r} + \left(2\nu\lambda_n Y_0(\lambda_n r) + 2(1-\nu)\frac{Y_1(\lambda_n r)}{r}\right)\cosh(\lambda_n z)\right),$$
$$\sigma_{z12n} = -A_{12n}\,\lambda_n^2\, z\sinh(\lambda_n z) Y_0(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{rz12n} = A_{12n}\,\lambda_n\, Y_1(\lambda_n r)\left(\sinh(\lambda_n z) + \lambda_n z\cosh(\lambda_n z)\right),$$
$$\sigma_{r13n} = A_{13n}\sinh(\lambda_n z)\left(\lambda_n J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n r)}{r}\right),$$
$$\sigma_{\varphi 13n} = A_{13n}\sinh(\lambda_n z)\frac{J_1(\lambda_n r)}{r},$$
$$\sigma_{z13n} = -A_{13n}\,\lambda_n \sinh(\lambda_n z)\, J_0(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{rz13n} = A_{13n}\,\lambda_n \cosh(\lambda_n z)\, J_1(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{r14n} = A_{14n}\cosh(\lambda_n z)\left(\lambda_n J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n r)}{r}\right),$$
$$\sigma_{\varphi 14n} = A_{14n}\cosh(\lambda_n z)\frac{J_1(\lambda_n r)}{r},$$
$$\sigma_{z14n} = -A_{14n}\,\lambda_n \cosh(\lambda_n z)\, J_0(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{rz14n} = A_{14n}\,\lambda_n \sinh(\lambda_n z)\, J_1(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{r15n} = A_{15n}\sinh(\lambda_n z)\left(\lambda_n Y_0(\lambda_n r) - \frac{Y_1(\lambda_n r)}{r}\right),$$
$$\sigma_{\varphi 15n} = A_{15n}\sinh(\lambda_n z)\frac{Y_1(\lambda_n r)}{r},$$
$$\sigma_{z15n} = -A_{15n}\,\lambda_n \sinh(\lambda_n z) Y_0(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{rz15n} = A_{15n}\,\lambda_n \cosh(\lambda_n z)\, Y_1(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{r16n} = A_{16n}\cosh(\lambda_n z)\left(\lambda_n Y_0(\lambda_n r) - \frac{Y_1(\lambda_n r)}{r}\right),$$
$$\sigma_{\varphi 16n} = A_{16n}\cosh(\lambda_n z)\frac{Y_1(\lambda_n r)}{r},$$
$$\sigma_{z16n} = -A_{16n}\,\lambda_n \cosh(\lambda_n z) Y_0(\lambda_n r),$$
$$\sigma_{rz16n} = A_{16n}\,\lambda_n \sinh(\lambda_n z) Y_1(\lambda_n r),$$

где $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{L}$, L – половина периода изменения НДС вдоль оси z, $I_0, I_1, K_0, K_1, J_0, J_1, Y_0, Y_1$ – функции Бесселя.

Приложение 7. Частные решения осесимметричной статической задачи линейной теории упругости для некоторых видов массовых сил

В данном приложении приведены частные решения осесимметричной статической задачи линейной теории упругости для некоторых видов массовых сил. В силу топологической специфики осесимметричной задачи решения выведены в цилиндрической СК. Все уравнения даны в соответствующем приложении.

Рассмотрим действие силы тяжести в направлении z. То есть

$$F_z = g_z \rho \ ,$$

$$F_r = 0 ,$$

где g_z и ρ – ускорение и плотность соответственно.

Аналогично методике, рассмотренной при получении частных решений плоской задачи, можно записать следующее частное решение

$$U_z = -\frac{1}{2}\frac{g_z \rho (1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} z^2 ,$$

$$U_r = 0 ,$$

$$\sigma_r = -\frac{\nu g_z \rho}{(1-\nu)} z ,$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{\nu g_z \rho}{(1-\nu)} z ,$$

$$\sigma_z = -g_z \rho z ,$$

$$\sigma_{rz} = 0 .$$

Можно рассмотреть действие постоянной силы в радиальном направлении $F_r = g_r \rho$, $F_z = 0$. Получим частное решение

$$U_r = -\frac{1}{3}\frac{g_r \rho (1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} r^2 ,$$

$$U_z = 0 ,$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{3}\frac{g_r \rho (2-\nu)}{(1-\nu)} r ,$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{1}{3}\frac{g_r \rho (1+\nu)}{(1-\nu)} r ,$$

$$\sigma_z = -\frac{\nu g_r \rho}{(1-\nu)} r ,$$

$$\sigma_{rz} = 0 .$$

Рассмотрим вращение вокруг оси z с постоянной скоростью ϖ_z, то есть $F_r = \varpi_z^2 \rho r$, $F_z = 0$. Получим частное решение

$$U_r = -\frac{1}{8}\frac{\varpi_z^2 \rho (1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} r^3 ,$$

$$U_z = 0 ,$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{8}\frac{\varpi_z^2 \rho (3-2\nu)}{(1-\nu)} r^2 ,$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{1}{8}\frac{\varpi_z^2\,\rho\left(1+2\nu\right)}{\left(1-\nu\right)}r^2,$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{2}\frac{\nu\,\varpi_z^2\,\rho}{\left(1-\nu\right)}r^2,$$

$$\sigma_{rz} = 0.$$

Пусть в направлении z действует сила, прямо пропорциональная расстоянию от оси r, то есть $F_z = \varpi_r^2\,\rho\,z$, $F_r = 0$. Тогда частное решение имеет вид

$$U_z = -\frac{1}{6}\frac{\varpi_r^2\,\rho\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{\left(1-\nu\right)E}z^3,$$

$$U_r = 0,$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{2}\frac{\nu\,\varpi_r^2\,\rho}{\left(1-\nu\right)}z^2,$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{\nu\,\varpi_r^2\,\rho}{\left(1-\nu\right)}z^2,$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{2}\varpi_r^2\,\rho\,z^2,$$

$$\sigma_{rz} = 0.$$

Приложение 8. Вывод частных решений плоской статической задачи линейной термоупругости в декартовой СК

Для решения задач термоупругости методом ФКО необходимо получить частные решения для уравнений термоупругости (выражения для перемещений и напряжений), соответствующие общему решению задачи теплопроводности. В данном приложении рассмотрена плоская статическая задача линейной термоупругости (ПНС и ПДС) в декартовой СК и приведены все полученные частные решения.

Рассмотрим плоскую задачу термоупругости в декартовой СК (x, y, z). Уравнения равновесия в напряжениях полностью совпадают с уравнениями задачи теории упругости, поскольку не зависят от природы сил, вызывающих напряжения в теле [12]. Геометрические соотношения также не меняются, так как получены из соотношений геометрии тела до и после деформации и не зависят от природы возникновения деформаций. А вот физические соотношения меняются – теперь деформации в теле вызваны не только напряжениями, но и температурным расширением. Таким образом, имеем следующие соотношения между деформациями и напряжениями [12]:

для ПНС

$$\sigma_x = \frac{E\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)}{1-\nu^2} - \frac{E\alpha\, T}{1-\nu},$$

$$\sigma_y = \frac{E\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)}{1-\nu^2} - \frac{E\alpha\, T}{1-\nu},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu}.$$

Для ПДС

$$\sigma_x = \frac{E\left((1+\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\alpha\, T}{1-2\nu},$$

$$\sigma_y = \frac{E\left((1+\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\alpha\, T}{1-2\nu},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu},$$

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - E\alpha\, T,$$

где α – коэффициент температурного расширения, T – температура.

Соответственно, меняются и уравнения равновесия в перемещениях. При отсутствии массовых сил имеем:

для ПНС

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(U_x) + \frac{\partial}{\partial y}(U_y)\right)}{2(1-\nu)} + \frac{\nabla^2(U_x)}{2(1+\nu)} - \frac{\alpha\,\frac{\partial}{\partial x}(T)}{1-\nu} = 0,$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(U_x) + \frac{\partial}{\partial y}(U_y)\right)}{2(1-\nu)} + \frac{\nabla^2(U_y)}{2(1+\nu)} - \frac{\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}(T)}{1-\nu} = 0.$$

Для ПДС

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(U_x)+\frac{\partial}{\partial y}(U_y)\right)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}+\frac{\nabla^2(U_x)}{2(1+\nu)}-\frac{\alpha\frac{\partial}{\partial x}(T)}{1-2\nu}=0,$$

$$\frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(U_x)+\frac{\partial}{\partial y}(U_y)\right)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}+\frac{\nabla^2(U_y)}{2(1+\nu)}-\frac{\alpha\frac{\partial}{\partial y}(T)}{1-2\nu}=0.$$

Частные решения данных уравнений равновесия можно получить, например следующим образом: полагая, что все напряжения равны нулю, уравнения равновесия в напряжениях удовлетворяются тождественно. Далее находятся выражения для деформаций и осуществляется переход к перемещениям по формулам, следующим из геометрических соотношений

$$U_x=\int\varepsilon_x\,dx+f_x(y),$$

$$U_y=\int\varepsilon_y\,dy+f_y(x),$$

где функции $f_x(y)$ и $f_y(x)$ находятся из условия удовлетворения уравнению совместности. Получены следующие частные решения задачи термоупругости, соответствующие общему решению задачи теплопроводности (приведено ранее):

для ПНС

$$U_{x00}=\alpha\,A_{00}\,x,$$

$$U_{y00}=\alpha\,A_{00}\,y,$$

$$U_{x10}=\frac{1}{2}\alpha\,A_{10}(x-y)(x+y),$$

$$U_{y10}=\alpha\,A_{10}\,x\,y,$$

$$U_{x20}=\alpha\,A_{20}\,x\,y,$$

$$U_{y20}=\frac{1}{2}\alpha\,A_{20}(y-x)(x+y),$$

$$U_{x30}=-\frac{1}{6}\alpha\,A_{30}\left(-3x^2+y^2\right)y,$$

$$U_{y30}=\frac{1}{6}\alpha\,A_{30}\left(3y^2-x^2\right)x,$$

$$U_{x1n}=-\frac{\alpha\,A_{1n}}{a_n}\cos(a_n x)\,\sinh(a_n y),$$

$$U_{y1n}=\frac{\alpha\,A_{1n}}{a_n}\sin(a_n x)\,\cosh(a_n y),$$

$$U_{x2n}=\frac{\alpha\,A_{2n}}{a_n}\sin(a_n x)\,\sinh(a_n y),$$

$$U_{y2n}=\frac{\alpha\,A_{2n}}{a_n}\cos(a_n x)\,\cosh(a_n y),$$

$$U_{x3n}=-\frac{\alpha\,A_{3n}}{a_n}\cos(a_n x)\,\cosh(a_n y),$$

$$U_{y3n} = \frac{\alpha\ A_{3n}}{a_n} \sin(a_n x) \sinh(a_n y),$$

$$U_{x4n} = \frac{\alpha\ A_{4n}}{a_n} \sin(a_n x) \cosh(a_n y),$$

$$U_{y4n} = \frac{\alpha\ A_{4n}}{a_n} \cos(a_n x) \sinh(a_n y).$$

Все напряжения равны нулю.
Для ПДС

$$U_{x00} = \alpha\ (1+\nu) A_{00}\, x,$$

$$U_{y00} = \alpha\ (1+\nu) A_{00}\, y,$$

$$U_{x10} = \frac{1}{2} \alpha (1+\nu) A_{10} (x-y)(x+y),$$

$$U_{y10} = \alpha\ (1+\nu) A_{10}\, x\ y,$$

$$U_{x20} = \alpha\ (1+\nu) A_{20}\, x\ y,$$

$$U_{y20} = \frac{1}{2} \alpha\ (1+\nu) A_{20} (y-x)(x+y),$$

$$U_{x30} = -\frac{1}{6} \alpha\ (1+\nu) A_{30} \left(-3x^2 + y^2\right) y,$$

$$U_{y30} = \frac{1}{6} \alpha\ (1+\nu) A_{30} \left(3y^2 - x^2\right) x,$$

$$U_{x1n} = -\frac{\alpha\ (1+\nu) A_{1n}}{a_n} \cos(a_n x) \sinh(a_n y),$$

$$U_{y1n} = \frac{\alpha\ (1+\nu) A_{1n}}{a_n} \sin(a_n x) \cosh(a_n y),$$

$$U_{x2n} = \frac{\alpha\ (1+\nu) A_{2n}}{a_n} \sin(a_n x) \sinh(a_n y),$$

$$U_{y2n} = \frac{\alpha\ (1+\nu) A_{2n}}{a_n} \cos(a_n x) \cosh(a_n y),$$

$$U_{x3n} = -\frac{\alpha\ (1+\nu) A_{3n}}{a_n} \cos(a_n x) \cosh(a_n y),$$

$$U_{y3n} = \frac{\alpha\ (1+\nu) A_{3n}}{a_n} \sin(a_n x) \sinh(a_n y),$$

$$U_{x4n} = \frac{\alpha\ (1+\nu) A_{4n}}{a_n} \sin(a_n x) \cosh(a_n y),$$

$$U_{y4n} = \frac{\alpha\ (1+\nu) A_{4n}}{a_n} \cos(a_n x) \sinh(a_n y).$$

Все напряжения (кроме σ_z) равны нулю.

Приложение 9. Вывод частных решений плоской статической задачи линейной термоупругости в цилиндрической СК

Рассмотрим плоскую статическую задачу линейной термоупругости в цилиндрической СК (r, φ, z). Уравнения равновесия в напряжениях и геометрические соотношения полностью совпадают с уравнениями задачи теории упругости. Физические соотношения аналогичны соотношениям в декартовой СК при соответствующей замене индексов:
для ПНС

$$\sigma_r = \frac{E(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\varphi)}{1-\nu^2} - \frac{E\alpha T}{1-\nu},$$
$$\sigma_\varphi = \frac{E(\varepsilon_\varphi + \nu\varepsilon_r)}{1-\nu^2} - \frac{E\alpha T}{1-\nu},$$
$$\sigma_{r\varphi} = \frac{E\varepsilon_{r\varphi}}{1+\nu}.$$

Для ПДС

$$\sigma_r = \frac{E\left((1+\nu)\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_\varphi\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\alpha\,T}{1-2\nu},$$
$$\sigma_\varphi = \frac{E\left((1+\nu)\varepsilon_\varphi + \nu\,\varepsilon_r\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\alpha\,T}{1-2\nu},$$
$$\sigma_{r\varphi} = \frac{E\varepsilon_{r\varphi}}{1+\nu},$$
$$\sigma_z = \nu\,(\sigma_r + \sigma_\varphi) - E\alpha\,T.$$

Уравнения равновесия в перемещениях можно получить, подставляя данные выражения в уравнения равновесия в напряжениях. Получаем:
для ПНС

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_r) + \frac{\frac{\partial}{\partial r}(U_r)}{r} - \frac{U_r}{r^2} + \frac{1-\nu}{2r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(U_r) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(U_\varphi)\right) +$$
$$+\frac{1+\nu}{2r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}(U_\varphi) - \frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}(U_\varphi)}{r^2} - \alpha(1+\nu)\frac{\partial}{\partial r}(T) = 0$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(U_\varphi)}{r^2} + \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_\varphi) + \frac{\frac{\partial}{\partial r}(U_\varphi)}{r} - \frac{U_\varphi}{r^2}\right) +$$
$$+\frac{1+\nu}{2r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}(U_r) + \frac{3-\nu}{2r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}(U_r) - \frac{\alpha(1+\nu)}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(T) = 0$$

Для ПДС

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_r)+\frac{\frac{\partial}{\partial r}(U_r)}{r}-\frac{U_r}{r^2}+\frac{1-2\nu}{2r^2(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(U_r)+$$

$$+\frac{1}{2r(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}(U_\varphi)-\frac{3-4\nu}{2r^2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial\varphi}(U_\varphi)-\frac{\alpha(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial r}(T)=0$$

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(U_\varphi)}{r^2}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}(U_\varphi)+\frac{\frac{\partial}{\partial r}(U_\varphi)}{r}-\frac{U_\varphi}{r^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2r(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r}(U_r)+\frac{3-4\nu}{2r^2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial\varphi}(U_r)-\frac{\alpha(1+\nu)}{r(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial\varphi}(T)=0$$

Получить частные решения уравнений термоупругости для общего решения соответствующей задачи теплопроводности можно также, как это было сделано в декартовой СК. Однако, в данном случае не всегда можно положить, что все напряжения равны нулю, так как не удается найти соответствующие перемещения, удовлетворяющие уравнениям совместности. Тогда необходимо решать непосредственно уравнения в перемещениях.

Получены следующие частные решения задачи термоупругости, соответствующие общему решению задачи теплопроводности (приведено ранее):
для ПНС

$$U_{r00}=\alpha A_{00}r\,,$$

$$U_{\varphi 00}=0\,,$$

$$\sigma_{r00}=0\,,$$

$$\sigma_{\varphi 00}=0\,,$$

$$\sigma_{r\varphi 00}=0\,,$$

$$U_{r10}=\frac{1}{2}\alpha\,(1+\nu)A_{10}r\,\ln(r)\,,$$

$$U_{\varphi 10}=0\,,$$

$$\sigma_{r10}=\frac{1}{2}\alpha\,EA_{10}\left(-\ln(r)+\frac{1}{1-\nu}\right),$$

$$\sigma_{\varphi 10}=\frac{1}{2}\alpha\,EA_{10}\left(-\ln(r)+\frac{\nu}{1-\nu}\right),$$

$$\sigma_{r\varphi 10}=0\,,$$

$$U_{r1n}=\frac{\alpha\,A_{1n}}{n+1}\sin(n\varphi)\,r^{n+1}\,,$$

$$U_{\varphi 1n}=-\frac{\alpha\,A_{1n}}{n+1}\cos(n\varphi)\,r^{n+1}\,,$$

$$U_{r2n}=\frac{\alpha\,A_{2n}}{n+1}\cos(n\varphi)\,r^{n+1}\,,$$

$$U_{\varphi 2n}=\frac{\alpha\,A_{2n}}{n+1}\sin(n\varphi)\,r^{n+1}\,,$$

$$U_{r3n}=\frac{\alpha\,A_{3n}}{1-n}\sin(n\varphi)\,r^{1-n}\,,$$

$$U_{\varphi 3n} = \frac{\alpha\ A_{3n}}{1-n}\cos(n\varphi)\, r^{1-n},$$

$$U_{r4n} = \frac{\alpha\ A_{4n}}{1-n}\cos(n\varphi)\, r^{1-n},$$

$$U_{\varphi 4n} = -\frac{\alpha\ A_{4n}}{1-n}\sin(n\varphi)\, r^{1-n},$$

$$\sigma_{r\,i\,n} = 0, \quad \sigma_{\varphi\, i\, n} = 0, \quad \sigma_{r\,\varphi\, i\, n} = 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Для $n = 1$ и $m = 3,4$ имеем несколько иные формулы

$$U_{r31} = \alpha\ A_{31}\sin(\varphi)\ln(r),$$

$$U_{\varphi 31} = \alpha\ A_{31}\cos(\varphi)\left(\ln(r) - \frac{1+\nu}{3-\nu}\right),$$

$$\sigma_{r31} = -\frac{2\alpha\ \nu\ EA_{31}}{(1+\nu)(3-\nu)\ r}\ \sin(\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi 31} = -\frac{2\alpha\ EA_{31}}{(1+\nu)(3-\nu)\ r}\ \sin(\varphi),$$

$$\sigma_{r\varphi 31} = \frac{2\alpha\ EA_{31}}{(1+\nu)(3-\nu)\ r}\ \cos(\varphi),$$

$$U_{r41} = \alpha\ A_{41}\cos(\varphi)\ln(r),$$

$$U_{\varphi 41} = -\alpha\ A_{41}\sin(\varphi)\left(\ln(r) - \frac{1+\nu}{3-\nu}\right),$$

$$\sigma_{r41} = -\frac{2\alpha\ \nu\ EA_{41}}{(1+\nu)(3-\nu)\ r}\ \cos(\varphi),$$

$$\sigma_{\varphi 41} = -\frac{2\alpha\ EA_{41}}{(1+\nu)(3-\nu)\ r}\ \cos(\varphi),$$

$$\sigma_{r\varphi 41} = -\frac{2\alpha\ EA_{41}}{(1+\nu)(3-\nu)\ r}\ \sin(\varphi).$$

Для ПДС

$$U_{r00} = \alpha(1+\nu)A_{00} r,$$

$$U_{\varphi 00} = 0,\ \sigma_{r00} = 0,\ \sigma_{\varphi 00} = 0,\ \sigma_{r\varphi 00} = 0,$$

$$U_{r10} = \frac{1}{2}\alpha\ \frac{1+\nu}{1-\nu}A_{10}\ r\ \ln(r),$$

$$U_{\varphi 10} = 0,$$

$$\sigma_{r10} = \frac{1}{2(1-\nu)}\alpha\ EA_{10}\left(-\ln(r) + \frac{1-\nu}{1-2\nu}\right),$$

$$\sigma_{\varphi 10} = \frac{1}{2(1-\nu)}\alpha\ EA_{10}\left(-\ln(r) + \frac{\nu}{1-2\nu}\right),$$

$$\sigma_{r\varphi 10} = 0$$

$$U_{r1n} = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,A_{1n}}{n+1}\,\sin(n\varphi)\,r^{n+1},$$
$$U_{\varphi 1n} = -\frac{\alpha\,(1+\nu)\,A_{1n}}{n+1}\,\cos(n\varphi)\,r^{n+1},$$
$$U_{r2n} = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,A_{2n}}{n+1}\,\cos(n\varphi)\,r^{n+1},$$
$$U_{\varphi 2n} = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,A_{2n}}{n+1}\,\sin(n\varphi)\,r^{n+1},$$
$$U_{r3n} = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,A_{3n}}{1-n}\,\sin(n\varphi)\,r^{1-n},$$
$$U_{\varphi 3n} = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,A_{3n}}{1-n}\,\cos(n\varphi)\,r^{1-n},$$
$$U_{r4n} = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,A_{4n}}{1-n}\,\cos(n\varphi)\,r^{1-n},$$
$$U_{\varphi 4n} = -\frac{\alpha\,(1+\nu)\,A_{4n}}{1-n}\,\sin(n\varphi)\,r^{1-n},$$
$$\sigma_{rin} = 0, \quad \sigma_{\varphi in} = 0, \quad \sigma_{r\varphi in} = 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Для $n=1$ и $m=3{,}4$ формулы следующие

$$U_{r31} = \alpha\,A_{31}\sin(\varphi)\,\ln(r),$$
$$U_{\varphi 31} = \alpha\,A_{31}\cos(\varphi)\left(\ln(r) - \frac{1+2\nu}{3-4\nu}\right),$$
$$\sigma_{r31} = -\frac{5\alpha\,\nu\,EA_{31}}{(1+\nu)(3-4\nu)\,r}\,\sin(\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 31} = -\frac{(2-\nu)\alpha\,EA_{31}}{(1+\nu)(3-4\nu)\,r}\,\sin(\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 31} = \frac{(2-\nu)\alpha\,EA_{31}}{(1+\nu)(3-4\nu)\,r}\,\cos(\varphi),$$
$$U_{r41} = \alpha\,A_{41}\cos(\varphi)\,\ln(r),$$
$$U_{\varphi 41} = -\alpha\,A_{41}\sin(\varphi)\left(\ln(r) - \frac{1+2\nu}{3-4\nu}\right),$$
$$\sigma_{r41} = -\frac{5\alpha\,\nu\,EA_{41}}{(1+\nu)(3-4\nu)\,r}\,\cos(\varphi),$$
$$\sigma_{\varphi 41} = -\frac{(2-\nu)\alpha\,EA_{41}}{(1+\nu)(3-4\nu)\,r}\,\cos(\varphi),$$
$$\sigma_{r\varphi 41} = -\frac{(2-\nu)\alpha\,EA_{41}}{(1+\nu)(3-4\nu)\,r}\,\sin(\varphi).$$

Приложение 10. Вывод частных решений осесимметричной статической задачи линейной термоупругости в сферической СК

Рассмотрим осесимметричную статическую задачу линейной термоупругости в сферической СК (r,θ,φ). Уравнения равновесия в напряжениях и геометрические соотношения полностью совпадают с уравнениями задачи теории упругости. Физические соотношения записываются следующим образом [12]:

$$\sigma_{ii} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{ii} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T,$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \quad i, j = r, \theta, \varphi, \; i \neq j.$$

Соответственно, меняются и уравнения равновесия в перемещениях

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(U_r) + \frac{2U_r + \frac{\partial}{\partial\theta}(U_\theta) + U_\theta\cot(\theta)}{r}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)r^2}\left(\cot(\theta) + \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(U_r) - \frac{\partial}{\partial r}(rU_\theta)\right) -$$

$$-\frac{(1+\nu)\alpha}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial r}(T) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(U_r) + \frac{2U_r + \frac{\partial}{\partial\theta}(U_\theta) + U_\theta\cot(\theta)}{r}\right) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rU_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(U_r)\right) -$$

$$-\frac{(1+\nu)\alpha}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial\theta}(T) = 0$$

Частные решения данных уравнений, соответствующие общему решению задачи теплопроводности (приведено ранее) получены автором подбором решений для перемещений с точностью до множителей, основываясь на знании свойств функций, входящих в выражения для температуры и виде уравнений равновесия в перемещениях. Постоянные множители найдены из условия тождественного удовлетворения данным уравнениям.

$$U_{r00} = \alpha A_{00} r,$$

$$U_{\theta 00} = 0,$$

$$U_{r10} = \frac{1}{2}\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha A_{10},$$

$$U_{\theta 10} = 0,$$

$$\sigma_{r00} = 0,$$

$$\sigma_{\theta 00} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi 00} = 0,$$

$$\sigma_{r\theta 00} = 0,$$

$$\sigma_{r10} = -\frac{A_{10}\alpha E}{(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{\theta 10} = -\frac{1}{2}\frac{A_{10}\alpha E}{(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{\varphi 10} = -\frac{1}{2}\frac{A_{10}\,\alpha\,E}{(1-\nu)r},$$

$$\sigma_{r\theta 10} = 0,$$

$$U_{r1n} = \frac{\alpha\,A_{1n}\,n(1+\nu)r^{n+1}\,P_n(\chi)}{2n+n^2-1+2\nu},$$

$$U_{\theta 1n} = \frac{\alpha\,A_{1n}\,(1+\nu)r^{n+1}\,\frac{\partial(P_n(\chi))}{\partial\chi}\sin(\theta)}{2n+n^2-1+2\nu},$$

$$U_{r2n} = -\frac{\alpha\,A_{2n}\,(n+1)(1+\nu)r^{-n}\,P_n(\chi)}{n^2-2+2\nu},$$

$$U_{\theta 2n} = \frac{\alpha\,A_{2n}\,(1+\nu)r^{-n}\,\frac{\partial(P_n(\chi))}{\partial\chi}\sin(\theta)}{n^2-2+2\nu},$$

$$\sigma_{r1n} = \frac{\alpha\,E\,A_{1n}\,r^n}{(2n+n^2-1+2\nu)(-1+2\nu)}\times$$
$$\times\left(((\nu n+1)(n-1)+2\nu)P_n(\chi) - 2\nu\frac{\partial(P_n(\chi))}{\partial\chi}\chi + \nu(1-\chi^2)\frac{\partial^2(P_n(\chi))}{\partial\chi^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta 1n} = \frac{\alpha\,E\,A_{1n}\,r^n}{(2n+n^2-1+2\nu)(-1+2\nu)}\times$$
$$\times\left(((n^2+n)(1-\nu)+2\nu-1)P_n(\chi) - \frac{\partial(P_n(\chi))}{\partial\chi}\chi + (1-\nu)(1-\chi^2)\frac{\partial^2(P_n(\chi))}{\partial\chi^2}\right)$$

$$\sigma_{\varphi 1n} = \frac{\alpha\,E\,A_{1n}\,r^n}{(2n+n^2-1+2\nu)(-1+2\nu)}\times$$
$$\times\left(((n^2+n)(1-\nu)+2\nu-1)P_n(\chi) - \frac{\partial(P_n(\chi))}{\partial\chi}\chi + \nu(1-\chi^2)\frac{\partial^2(P_n(\chi))}{\partial\chi^2}\right)$$

$$\sigma_{r\theta 1n} = 0$$

$$\sigma_{\theta 2n} = \frac{\alpha\,E\,A_{2n}\,r^{-n-1}}{(n^2-2+2\nu)(-1+2\nu)}\times$$
$$\times\left((n(n+1)(1-\nu)+2\nu-1)P_n(\chi) - \frac{\partial(P_n(\chi))}{\partial\chi}\chi + (1-\nu)(1-\chi^2)\frac{\partial^2(P_n(\chi))}{\partial\chi^2}\right)$$

$$\sigma_{\varphi 2n} = \frac{\alpha\,E\,A_{2n}\,r^{-n-1}}{(n^2-2+2\nu)(-1+2\nu)}\times$$
$$\times\left((n(n+1)(1-\nu)+2\nu-1)P_n(\chi) - \frac{\partial(P_n(\chi))}{\partial\chi}\chi + \nu(1-\chi^2)\frac{\partial^2(P_n(\chi))}{\partial\chi^2}\right)$$

$$\sigma_{r\theta 2n} = 0.$$

Приложение 11. Вывод частных решений осесимметричной статической задачи линейной термоупругости в цилиндрической СК

Рассмотрим осесимметричную статическую задачу линейной термоупругости в цилиндрической СК (r, φ, z). Уравнения равновесия в напряжениях и геометрические соотношения полностью совпадают с уравнениями задачи теории упругости. Физические соотношения записываются следующим образом [12]:

$$\sigma_{ii} = \lambda e + 2\mu \varepsilon_{ii} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \,,$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j = r, \varphi, z, \; i \neq j \,.$$

Соответственно, меняются и уравнения равновесия в перемещениях

$$\nabla^2(U_r) - \frac{U_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}(e) - \frac{2(1+\nu)\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}(T) = 0 \,,$$

$$\nabla^2(U_z) + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}(e) - \frac{2(1+\nu)\alpha}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}(T) = 0 \,.$$

Частные решения данных уравнений, соответствующие общему решению задачи теплопроводности (приведено ранее) получены автором подбором решений для перемещений с точностью до множителей, основываясь на знании свойств функций, входящих в выражения для температуры и виде уравнений равновесия в перемещениях. Постоянные множители найдены из условия тождественного удовлетворения данным уравнениям.

$$U_{r00} = \alpha A_{00}\, r \,,$$

$$U_{z00} = \alpha A_{00}\, z \,,$$

$$U_{r10} = \frac{1}{2}\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha A_{10}\, r \ln(r) \,,$$

$$U_{z10} = 0 \,,$$

$$U_{r20} = \alpha A_{20}\, r z \,,$$

$$U_{z20} = \alpha A_{20}\left(z^2 - r^2\right),$$

$$\sigma_{r00} = 0 \,,$$

$$\sigma_{z00} = 0 \,,$$

$$\sigma_{\varphi 00} = 0 \,,$$

$$\sigma_{rz00} = 0 \,,$$

$$\sigma_{r10} = -\frac{A_{10}\,\alpha E}{2(1-\nu)}\left(\ln(r) - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\right),$$

$$\sigma_{\varphi 10} = -\frac{A_{10}\,\alpha E}{2(1-\nu)}\left(\ln(r) - \frac{\nu}{1-2\nu}\right),$$

$$\sigma_{z10} = -\frac{A_{10}\,\alpha E}{2(1-\nu)}\left(2\ln(r) - \frac{\nu}{1-2\nu}\right),$$

$$\sigma_{rz10} = 0 \,,$$

$$\sigma_{r20} = 0 \,,$$

$$\sigma_{z20} = 0 \,,$$

$$\sigma_{\varphi 20} = 0,$$
$$\sigma_{rz20} = 0,$$
$$U_{r1n} = \frac{\alpha A_{1n} (1+\nu)}{\beta_n} \sin(\beta_n z) I_1(\beta_n r),$$
$$U_{z1n} = -\frac{\alpha A_{1n} (1+\nu)}{\beta_n} \cos(\beta_n z) I_0(\beta_n r),$$
$$U_{r2n} = \frac{\alpha A_{2n} (1+\nu)}{\beta_n} \cos(\beta_n z) I_1(\beta_n r),$$
$$U_{z2n} = \frac{\alpha A_{2n} (1+\nu)}{\beta_n} \sin(\beta_n z) I_0(\beta_n r),$$
$$U_{r3n} = -\frac{\alpha A_{3n} (1+\nu)}{\beta_n} \sin(\beta_n z) K_1(\beta_n r),$$
$$U_{z3n} = -\frac{\alpha A_{3n} (1+\nu)}{\beta_n} \cos(\beta_n z) K_0(\beta_n r),$$
$$U_{r4n} = -\frac{\alpha A_{4n} (1+\nu)}{\beta_n} \cos(\beta_n z) K_1(\beta_n r),$$
$$U_{z4n} = \frac{\alpha A_{4n} (1+\nu)}{\beta_n} \sin(\beta_n z) K_0(\beta_n r),$$
$$U_{r5n} = \frac{\alpha A_{5n} (1+\nu)}{\beta_n} \sinh(\beta_n z) J_1(\beta_n r),$$
$$U_{z5n} = \frac{\alpha A_{5n} (1+\nu)}{\beta_n} \cosh(\beta_n z) J_0(\beta_n r),$$
$$U_{r6n} = \frac{\alpha A_{6n} (1+\nu)}{\beta_n} \cosh(\beta_n z) J_1(\beta_n r),$$
$$U_{z6n} = \frac{\alpha A_{6n} (1+\nu)}{\beta_n} \sinh(\beta_n z) J_0(\beta_n r),$$
$$U_{r7n} = \frac{\alpha A_{7n} (1+\nu)}{\beta_n} \sinh(\beta_n z) Y_1(\beta_n r)$$
$$U_{z7n} = \frac{\alpha A_{7n} (1+\nu)}{\beta_n} \cosh(\beta_n z) Y_0(\beta_n r)$$
$$U_{r8n} = \frac{\alpha A_{8n} (1+\nu)}{\beta_n} \cosh(\beta_n z) Y_1(\beta_n r),$$
$$U_{z8n} = \frac{\alpha A_{8n} (1+\nu)}{\beta_n} \sinh(\beta_n z) Y_0(\beta_n r),$$
$$\sigma_{r1n} = -\frac{\alpha E A_{1n}}{\beta_n r} \sin(\beta_n z) I_1(\beta_n r),$$
$$\sigma_{z1n} = 0,$$
$$\sigma_{rz1n} = 0,$$
$$\sigma_{\varphi 1n} = \alpha E A_{1n} \sin(\beta_n z)\left(-I_0(\beta_n r) + \frac{I_1(\beta_n r)}{\beta_n r} \right),$$

$$\sigma_{r2n} = -\frac{\alpha E A_{2n}}{\beta_n r} \cos(\beta_n z) I_1(\beta_n r),$$

$$\sigma_{z2n} = 0,$$

$$\sigma_{rz2n} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi 2n} = \alpha E A_{2n} \cos(\beta_n z)\left(-I_0(\beta_n r) + \frac{I_1(\beta_n r)}{\beta_n r}\right),$$

$$\sigma_{r3n} = \frac{\alpha E A_{3n}}{\beta_n r} \sin(\beta_n z) K_1(\beta_n r),$$

$$\sigma_{z3n} = 0,$$

$$\sigma_{rz3n} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi 3n} = -\alpha E A_{3n} \sin(\beta_n z)\left(K_0(\beta_n r) + \frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r}\right),$$

$$\sigma_{r4n} = \frac{\alpha E A_{4n}}{\beta_n r} \cos(\beta_n z) K_1(\beta_n r),$$

$$\sigma_{z4n} = 0,$$

$$\sigma_{rz4n} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi 4n} = -\alpha E A_{4n} \cos(\beta_n z)\left(K_0(\beta_n r) + \frac{K_1(\beta_n r)}{\beta_n r}\right),$$

$$\sigma_{r5n} = -\frac{\alpha E A_{5n}}{\beta_n r} \sinh(\beta_n z) J_1(\beta_n r),$$

$$\sigma_{z5n} = 0$$

$$\sigma_{rz5n} = 0$$

$$\sigma_{\varphi 5n} = -\alpha E A_{5n} \sinh(\beta_n z)\left(J_0(\beta_n r) - \frac{J_1(\beta_n r)}{\beta_n r}\right)$$

$$\sigma_{r6n} = -\frac{\alpha E A_{6n}}{\beta_n r} \cosh(\beta_n z) J_1(\beta_n r)$$

$$\sigma_{z6n} = 0,$$

$$\sigma_{rz6n} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi 6n} = -\alpha E A_{6n} \cosh(\beta_n z)\left(J_0(\beta_n r) - \frac{J_1(\beta_n r)}{\beta_n r}\right),$$

$$\sigma_{r7n} = -\frac{\alpha E A_{7n}}{\beta_n r} \sinh(\beta_n z) Y_1(\beta_n r),$$

$$\sigma_{z7n} = 0,$$

$$\sigma_{rz7n} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi 7n} = -\alpha E A_{7n} \sinh(\beta_n z)\left(Y_0(\beta_n r) - \frac{Y_1(\beta_n r)}{\beta_n r}\right),$$

$$\sigma_{r8n} = -\frac{\alpha E A_{8n}}{\beta_n r} \cosh(\beta_n z) Y_1(\beta_n r),$$

$$\sigma_{z8n} = 0,$$

$$\sigma_{rz8n} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi 8n} = -\alpha E A_{8n} \cosh(\beta_n z)\left(Y_0(\beta_n r) - \frac{Y_1(\beta_n r)}{\beta_n r} \right).$$

Следует заметить, что выражения вида $\frac{I_1(y)}{y}, \frac{J_1(y)}{y}$ не имеют особенностей при $y = 0$, поскольку $I_1(0) = J_1(0) = 0$.

Приложение 12. Вывод общих решений плоской нестационарной задачи теплопроводности в декартовой СК

Рассмотрим плоскую нестационарную задачу теплопроводности в декартовой СК (x, y, z). Дифференциальное уравнение задачи – уравнение Фурье [62]

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0,$$

где α – коэффициент температуропроводности, τ – время.

Общее решение данного уравнения можно получить методом разделения переменных, то есть полагаем

$$T(x, y, \tau) = A\,\mathrm{T}(\tau)\,X(x)\,Y(y).$$

Очевидно, что можно выбрать следующие функции

$$\mathrm{T}(\tau) = e^{m\gamma\tau},$$

$$X(x) = \sin(a_n\, x),$$

где $m, \gamma = -\infty...\infty$, $a_n = \dfrac{n\pi}{L}$, L – половина периода изменения температуры вдоль оси x.

Тогда получаем дифференциальное уравнение относительно одной неизвестной функции

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(Y(y)\right) - \left(a_n^2 + \frac{m\gamma}{\alpha}\right)Y(y) = 0.$$

Решением уравнения являются тригонометрические или гиперболические функции. Аналогично можно записать другие решения, а также некоторые решения в виде полиномов.

Таким образом, получено следующее общее решение

$$T(x, y, t) = \sum_{i=0}^{5} T_{0\,i} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{1mn} + T_{2mn} + T_{3mn} + T_{4mn}\right),$$

$$T_{00} = A_{00}\left(y^2 + 2\alpha\,\tau\right),$$

$$T_{01} = A_{01}\left(y^3 + 6\alpha\,\tau\, y\right),$$

$$T_{02} = A_{02}\left(y^4 + 12\alpha\left(\tau\, y^2 + \alpha\,\tau^2\right)\right),$$

$$T_{03} = A_{03}\left(y^5 + 20\alpha\, y^3\tau + 60\alpha^2\, y\tau^2\right),$$

$$T_{04} = A_{04}\left(y^6 + 30\alpha\, y^4\tau + 180\alpha^2\, y^2\,\tau^2 + 120\alpha^3\,\tau^3\right),$$

$$T_{05} = A_{05}\left(y^7 + 42\alpha\, y^5\tau + 420\alpha^2\, y^3\,\tau^2 + 840\alpha^3\, y\,\tau^3\right),$$

$$T_{1mn} = A_{1mn}\, e^{m\gamma\tau}\sin(a_n\, x)\begin{cases}\sinh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn}\\ \sin\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0\end{cases},$$

$$T_{2mn} = A_{2mn}\, e^{m\gamma\tau}\cos(a_n\, x)\begin{cases}\sinh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn}\\ \sin\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0\end{cases},$$

$$T_{3mn} = A_{3mn}\, e^{m\gamma\tau}\sin(a_n\, x)\begin{cases}\cosh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn}\\ \cos\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0\end{cases},$$

$$T_{4mn} = A_{4mn} e^{m\gamma\tau} \cos(a_n x) \begin{cases} \cosh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ \cos\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases},$$

где $\beta_{mn} = a_n^2 + \dfrac{m\gamma}{\alpha}$.

И выражения для градиентов

$$grad(T_{00}) = \{0;\ 2A_{00}\, y\},$$

$$grad(T_{01}) = \{0;\ A_{01}\left(3y^2 + 6\alpha\,\tau\right)\},$$

$$grad(T_{02}) = \{0;\ A_{02}\left(4y^3 + 12\alpha\; y\tau\right)\},$$

$$grad(T_{03}) = \{0;\ A_{03}\left(5y^4 + 60\alpha\; y^2\tau + 60\alpha^2\tau^2\right)\},$$

$$grad(T_{04}) = \{0;\ A_{04}\left(6y^5 + 120\alpha\; y^3\tau + 360\alpha^2\, y\;\tau^2\right)\},$$

$$grad(T_{05}) = \{0;\ A_{05}\left(7y^6 + 210\alpha\; y^4\tau + 1260\alpha^2\, y^2\tau^2 + 840\alpha^3\;\tau^3\right)\},$$

$$grad(T_{1mn}) = A_{1mn} e^{m\gamma\tau} \times$$

$$\times\left\{ a_n\ \cos(a_n x) \begin{cases} \sinh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ \sin\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases};\ \sin(a_n x) \begin{cases} \sqrt{\beta_{mn}} \cosh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ \sqrt{-\beta_{mn}} \cos\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases} \right\},$$

$$grad(T_{2mn}) = A_{2mn} e^{m\gamma\tau} \times$$

$$\times\left\{ -a_n\ \sin(a_n x) \begin{cases} \sinh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ \sin\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases};\ \cos(a_n x) \begin{cases} \sqrt{\beta_{mn}} \cosh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ \sqrt{-\beta_{mn}} \cos\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases} \right\},$$

$$grad(T_{3mn}) = A_{3mn} e^{m\gamma\tau} \times$$

$$\times\left\{ a_n\ \cos(a_n x) \begin{cases} \cosh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ \cos\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases};\ \sin(a_n x) \begin{cases} \sqrt{\beta_{mn}} \sinh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ -\sqrt{-\beta_{mn}} \sin\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases} \right\},$$

$$grad(T_{4mn}) = A_{4mn} e^{m\gamma\tau} \times$$

$$\times\left\{ -a_n \sin(a_n x) \begin{cases} \cosh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ \cos\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases};\ \cos(a_n x) \begin{cases} \sqrt{\beta_{mn}} \sinh\left(\sqrt{\beta_{mn}}\, y\right) & 0 \le \beta_{mn} \\ -\sqrt{-\beta_{mn}} \sin\left(\sqrt{-\beta_{mn}}\, y\right) & \beta_{mn} < 0 \end{cases} \right\}$$

Приложение 13. Вывод общих решений плоской нестационарной задачи теплопроводности в цилиндрической СК

Рассмотрим плоскую нестационарную задачу теплопроводности в цилиндрической СК (r,φ,z). Дифференциальное уравнение задачи – уравнение Фурье [62]

$$\nabla^2(T)-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau}=0,$$

где α – коэффициент температуропроводности, τ – время.

Общее решение данного уравнения можно получить методом разделения переменных, то есть полагаем

$$T(x,\, y,\, t)=A\;\mathrm{T}(\tau)R(r)\Phi(\varphi).$$

Очевидно, что можно выбрать функции в виде

$$\mathrm{T}(\tau)=e^{m\gamma\tau},$$

$$\Phi(\varphi)=\sin(n\,\varphi),$$

где $m,\gamma=-\infty...\infty$, $n=\overline{-\infty...\infty}$.

Тогда получаем дифференциальное уравнение относительно одной неизвестной функции

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(R(r))+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(R(r))-\left(\frac{n^2}{r^2}+\frac{m\gamma}{\alpha}\right)R(r)=0.$$

Решением уравнения являются функции Бесселя [123]. Аналогично можно записать другие решения, а также некоторые решения в виде полиномов.

Таким образом, получено следующее общее решение

$$T(x,\, y,\, t)=\sum_{i=0}^{2}T_{0\,i}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_{1mn}+T_{2mn}+T_{3mn}+T_{4mn}\right),$$

$$T_{00}=A_{00}\left(r^2+4\alpha\,\tau\right),$$

$$T_{01}=A_{01}\left(r^4+16\alpha r^2\,\tau+32\,\alpha^2\,\tau^2\right),$$

$$T_{02}=A_{02}\left(r^6+36\,\alpha\,r^4\,\tau+288\alpha^2\,r^2\,\tau^2+384\alpha^3\,\tau^3\right),$$

$$T_{1mn}=A_{1mn}\,e^{m\gamma\tau}\sin(n\,\varphi)\begin{cases}J_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\,r\right) & m<0,\\[2ex] I_n\left(\sqrt{\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\,r\right) & 0<m\end{cases},$$

$$T_{2mn}=A_{2mn}\,e^{m\gamma\tau}\cos(n\,\varphi)\begin{cases}J_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\,r\right) & m<0,\\[2ex] I_n\left(\sqrt{\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\,r\right) & 0<m\end{cases},$$

$$T_{3mn} = A_{3mn}\, e^{m\gamma\tau} \sin(n\,\varphi) \begin{cases} Y_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & m < 0, \\ K_n\left(\sqrt{\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & 0 < m \end{cases},$$

$$T_{4mn} = A_{4mn}\, e^{m\gamma\tau} \cos(n\,\varphi) \begin{cases} Y_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & m < 0, \\ K_n\left(\sqrt{\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & 0 < m \end{cases},$$

И выражения для градиентов

$$grad(T_{00}) = \{2\, A_{00}\, r;\, 0\},$$

$$grad(T_{01}) = \{A_{01}\left(4r^3 + 32\alpha\, r\, \tau\right);\, 0\},$$

$$grad(T_{02}) = \{A_{02}\left(6r^5 + 144\alpha\, r^3\, \tau + 576\alpha^2\, r\, \tau^2\right);\, 0\},$$

$$grad(T_{1mn}) = A_{1mn}\, e^{m\gamma\tau} \times$$

$$\times \left\{ \sin(n\,\varphi) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(J_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right)\right) & m < 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(I_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right)\right) & 0 < m \end{cases};\ \frac{n\cos(n\,\varphi)}{r} \begin{cases} J_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & m < 0, \\ I_n\left(\sqrt{\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & 0 < m \end{cases} \right\},$$

$$grad(T_{2mn}) = A_{2mn}\, e^{m\gamma\tau} \times$$

$$\times \left\{ \cos(n\,\varphi) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(J_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right)\right) & m < 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(I_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right)\right) & 0 < m \end{cases};\ \frac{-n\sin(n\,\varphi)}{r} \begin{cases} J_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & m < 0, \\ I_n\left(\sqrt{\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & 0 < m \end{cases} \right\},$$

$$grad(T_{3mn}) = A_{3mn}\, e^{m\gamma y} \times$$

$$\times \left\{ \sin(n\,\varphi) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(Y_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right)\right) & m < 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(K_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right)\right) & 0 < m \end{cases};\ \frac{n\cos(n\,\varphi)}{r} \begin{cases} Y_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & m < 0, \\ K_n\left(\sqrt{\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & 0 < m \end{cases} \right\},$$

$$grad(T_{4mn}) = A_{4mn}\, e^{m\gamma\tau} \times$$

$$\times \left\{ \cos(n\,\varphi) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(Y_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right)\right) & m < 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(K_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right)\right) & 0 < m \end{cases};\ -\frac{n\sin(n\,\varphi)}{r} \begin{cases} Y_n\left(\sqrt{-\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & m < 0, \\ K_n\left(\sqrt{\dfrac{m\gamma}{\alpha}}\, r\right) & 0 < m \end{cases} \right\}$$

.

Приложение 14. Геометрическая интерпретация общих решений и формирование ФКО

В предыдущих приложениях даны общие решения дифференциальных уравнений в различных СК. Для применения метода ФКО необходимо дать их геометрическую интерпретацию, то есть ответить на вопрос, каким каноническим областям они соответствуют.

Рассмотрим общее решение стационарной задачи теплопроводности в декартовой СК. Легко убедиться, что при $y = const$ эти функции представляют собой разложение в ряд Фурье по гармоническим функциям с периодом $2L$ [127]. Причем разложения с $\cosh$ являются симметричными относительно оси x, а с $\sinh$ – антисимметричными. Таким образом, данное решение имеет следующую геометрическую интерпретацию: бесконечный вдоль оси x тонкий ($H << L$) “слой” (рис. 1).

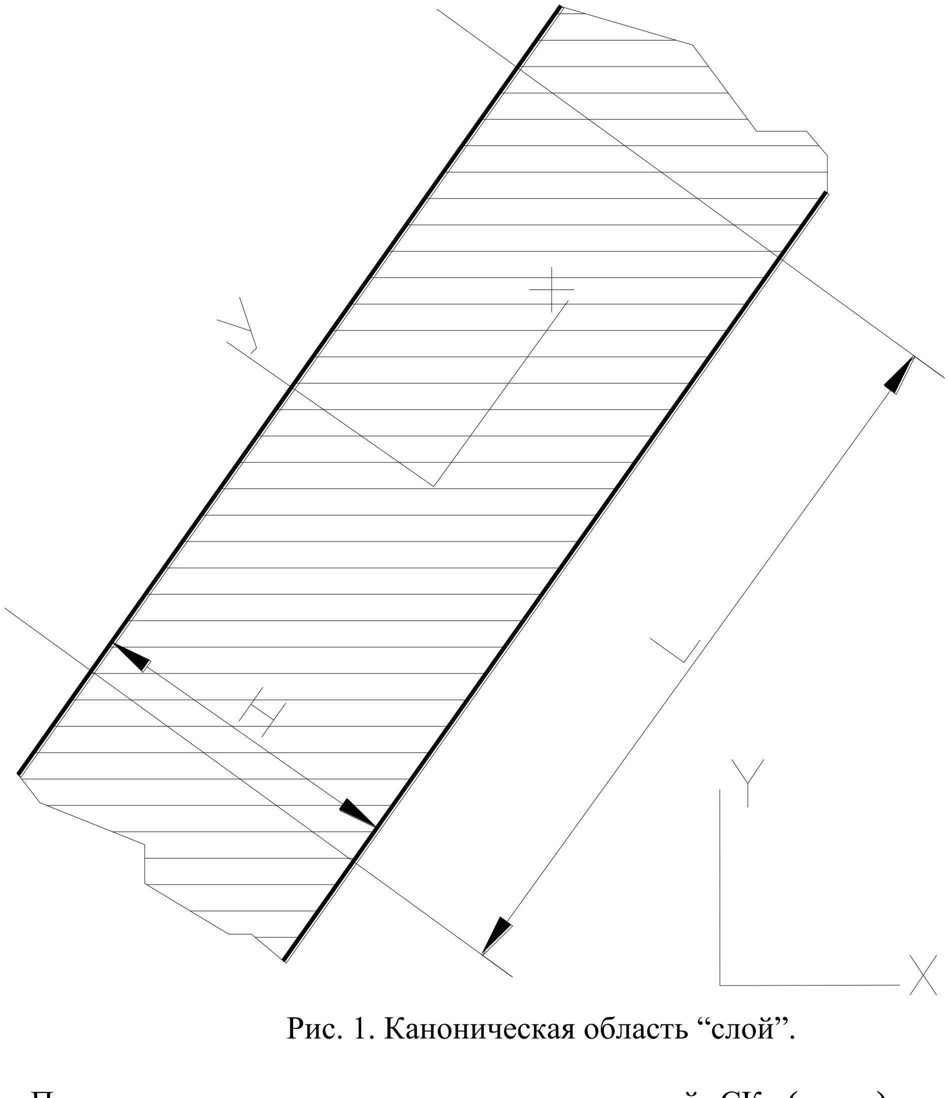


Рис. 1. Каноническая область “слой”.

Приведенное решение записано в декартовой СК (x, y, z), которую можно рассматривать как локальную. Ее можно сместить относительно глобальной СК и повернуть на некоторый угол. То есть данное решение может быть использовано для семейства ФКО. При решении каждая ФКО будет характеризоваться параметрами смещения, а так же полупериодом L. Обычно при решении все базисные функции так же преобразуются в одну глобальную СК.

Аналогичную интерпретацию имеют и общие решения задач теории упругости в декартовой СК [127]. Следует заметить, что в решениях присутствуют так же непериодические функции (имеют индекс 0), которые соответствуют некоторым фундаментальным напряженным состояниям (чистое растяжение, сдвиг и т.д.), важным во многих задачах.

Рассмотрим теперь общие решения для плоских задач в цилиндрической СК. В данном случае можно сказать, что при $r = const$ некоторая функция разложена в ряд Фурье по углу φ. Геометрическая интерпретация общего решения – "кольцо" (рис. 2). Локальная СК также может быть смещена относительно глобальной о повернута на некоторый угол. Если рассмотреть только несингулярные при $r = 0$ функции, то получим каноническую область "круг", если только сингулярные – круговую "полость" в бесконечном пространстве (рис. 2).

Перейдем к решениям для осесимметричных задач. Проводя аналогичные рассуждения о решении уравнений в сферической СК, получаем, что с помощью данного ряда можно разложить произвольную функцию на поверхности полой сферы, которая и является геометрической интерпретацией данного общего решения (рис. 3). Выбирая только несингулярные функции, получаем сплошную сферу, и наоборот – сферическую полость. Однако, локальную сферическую СК можно двигать только вдоль глобальной оси Z и нельзя поворачивать, поскольку тогда теряется осевая симметрия.

Геометрической интерпретацией общих решений осесиметричных задач в цилиндрической СК является цилиндр. Если рассмотреть по координате z только гармонические функции $\sin$ и $\cos$, то получим решение для длинного цилиндра с периодом $2L$ (рис. 4), рассматривая гиперболические функции $\sinh$ и $\cosh$ – для короткого цилиндра [121]. При исключении всех сингулярных функций получим решение для сплошного цилиндра, и наоборот – для цилиндрической полости.

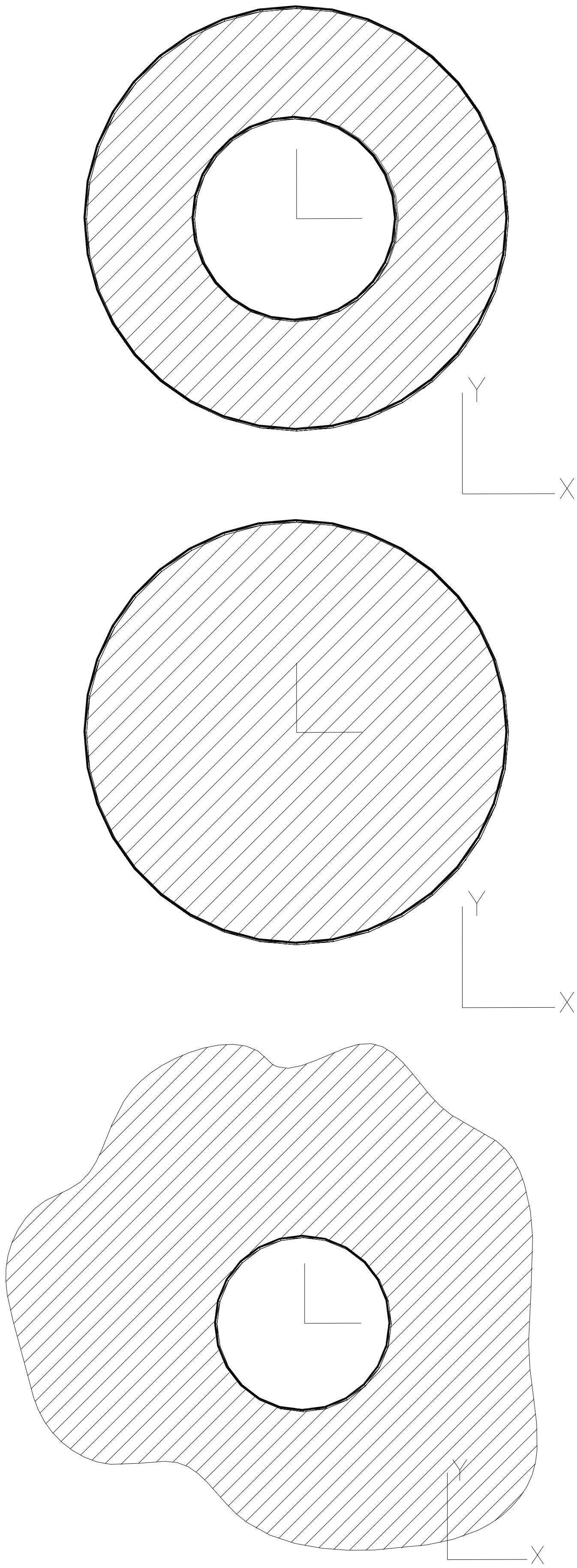


Рис. 2. Канонические области “кольцо”, “круг”, “полость”

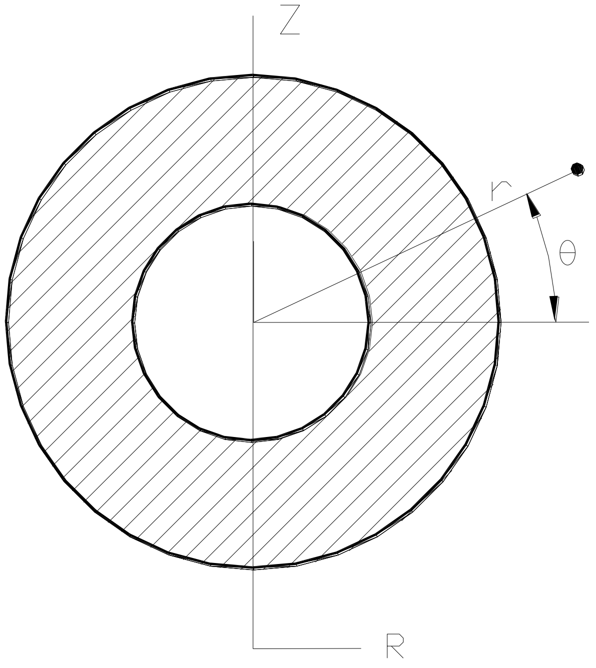


Рис. 3. Каноническая область “полая сфера”

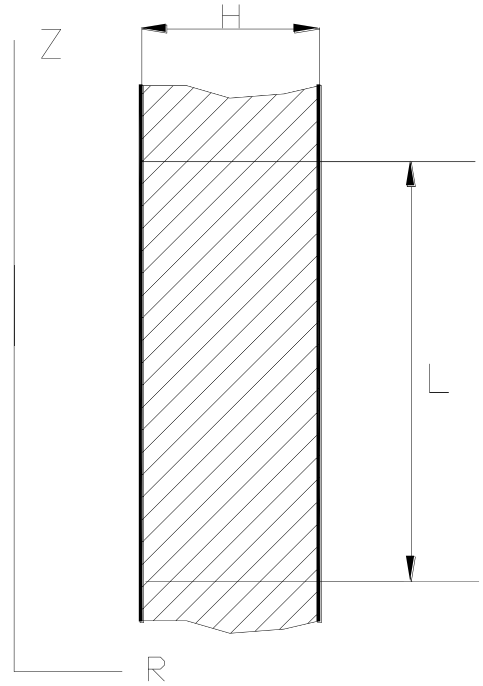


Рис. 4. Каноническая область “полый цилиндр”